

Autor/es: Funes María Emilia

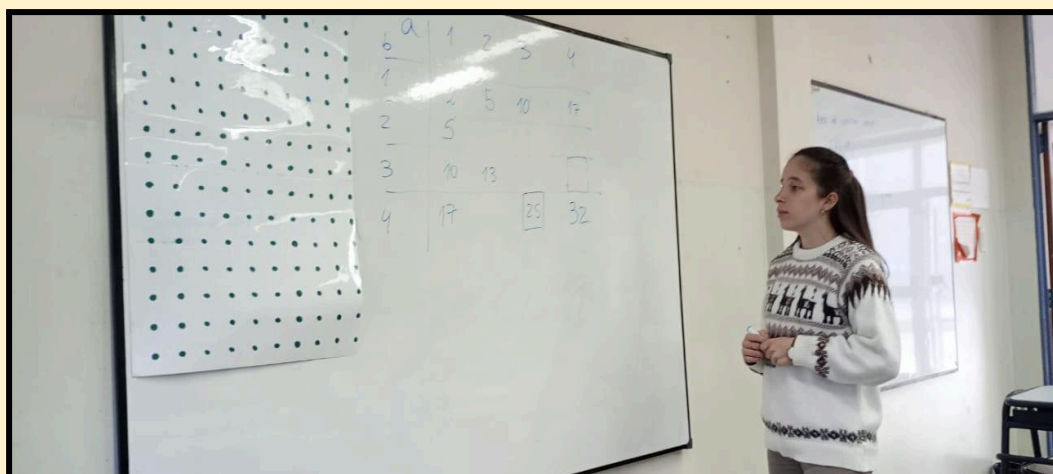
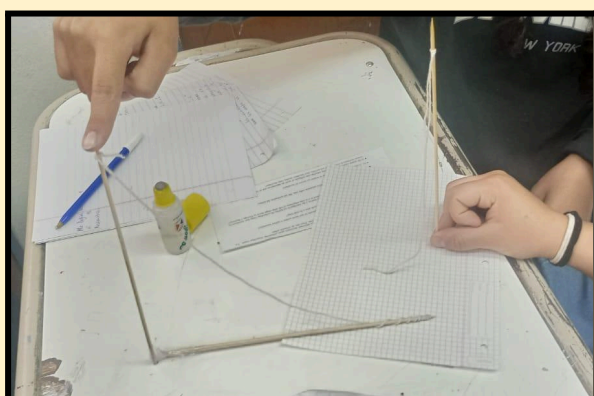
Contacto: maremiliafunes@gmail.com

Título: En fin, la hipotenusa

Sección: Narrativas de prácticas

Institución: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UNLPam

En fin, la hipotenusa



En fin, la hipotenusa

Resumen

El presente artículo se realizó con el objetivo de exponer algunas de las actividades que formaron parte de la propuesta de aula de la residencia, realizada como parte de la asignatura Práctica Educativa IV, del Profesorado en Matemática, cursada durante el año 2025. En la misma debía abordarse la resolución de triángulos rectángulos, a partir del Teorema de Pitágoras y de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo.

Con este objetivo, se realizó una revisión de textos sobre los contenidos a tratar, de investigaciones didácticas realizadas sobre su enseñanza, y de fuentes curriculares en relación a la propuesta.

Finalmente, se muestra una selección de las actividades llevadas a cabo en la Propuesta de Aula y el correspondiente análisis de su implementación, incluyendo registros de los y las estudiantes.

Palabras clave: Teorema de Pitágoras, razones trigonométricas, propuesta, residencia.

Finally, the hypotenuse

Abstract

This article was written to present some of the activities that comprised the classroom proposal for the student teaching residency, carried out as part of the Educational Practice IV course in the Mathematics Teacher Training Program during the 2025 academic year. The proposal focused on solving right triangles using the Pythagorean Theorem and the trigonometric ratios sine, cosine, and tangent of an angle.

To this end, a review of texts on the relevant content, didactic research on its teaching, and curricular sources related to the proposal was conducted.

Finally, a selection of the activities carried out in the classroom proposal is presented, along with an analysis of their implementation, including student records.

Keywords: Pythagorean theorem, trigonometric ratios, proposal, residence.

INTRODUCCIÓN

El presente artículo se realizó con el objetivo de exponer algunas de las actividades que formaron parte de la propuesta de aula de la residencia, realizada como parte de la asignatura Práctica Educativa IV, del Profesorado en Matemática, cursada durante el año 2025. En la misma debía abordarse la resolución de triángulos rectángulos, a partir del Teorema de Pitágoras y de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo. La propuesta se implementó en cuarto año del Colegio Manuel Belgrano de Santa Rosa. Se trata de un curso de 27 alumnos, de los cuales 15 solían ir con regularidad, algunos asistían ocasionalmente y dos o tres con muy poca frecuencia. Ninguno tenía diagnóstico de discapacidad.

La pregunta que sustentó la planificación de la propuesta fue “¿Cómo enseñar el Teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas mediante la metodología de resolución de problemas?”. Es decir, concibiendo al estudiante como sujeto capaz de construir conocimiento y al docente como facilitador del aprendizaje. Para ello, según el Marco Nacional para la Mejora del Aprendizaje en Matemática, “se concibe un problema como una situación que admite diversas estrategias de resolución y por lo tanto lleva a los/as estudiantes a tomar decisiones. Un problema bien planteado desde el punto de vista didáctico pone a los/as estudiantes frente a cierta dificultad o resistencia de tal naturaleza y complejidad que ellos/as pueden resolverla, aunque con cierto esfuerzo y andamiaje docente en determinados momentos.”

Para responder a esta pregunta fue necesario conocer los principales obstáculos en la enseñanza de este conocimiento. Además, otro interrogante que surgió de inmediato fue “¿Cómo hacer que resulte interesante para los y las estudiantes?”. Esto hace referencia a la búsqueda de motivación intrínseca, aspecto al cual se refiere la Teoría de Situaciones Didácticas. Su importancia radica en que cada estudiante se hace responsable del problema, por lo que utilizará todas las estrategias y medios disponibles para su resolución. Entonces el o la docente no requerirá generar motivación extrínseca apelando a sistemas de premios.

Al mismo tiempo se requirió conocer los fundamentos matemáticos del Teorema de Pitágoras y de las razones trigonométricas junto con investigaciones didácticas realizadas. Se verá que otorgar contexto histórico o utilizar diversidad de recursos y actividades (visuales, auditivos, kinestésicos, digitales) son algunas respuestas.

Finalmente, se muestra una selección de las actividades llevadas a cabo en la Propuesta de Aula y el correspondiente análisis de su implementación, incluyendo registros de los y las estudiantes.

FUNDAMENTOS

Fundamentos matemáticos

Teorema de Pitágoras

El famoso teorema fue recogido con detalle en el primer libro de geometría de la historia de Occidente, *Elementos de Geometría*, de Euclides. Su demostración se conoce como «La prueba del molino de viento». No obstante, son conocidos sus antecedentes en las más

importantes civilizaciones orientales de la Antigüedad, Babilonia, Egipto, la India y China, y muchos historiadores de la ciencia aseguran que Pitágoras debió conocerlos en sus múltiples viajes. Dichos antecedentes eran ejemplos concretos; Pitágoras pasó de los ejemplos particulares a un teorema general que valiera para cualquier triángulo rectángulo.

En el antiguo Egipto existía una notable necesidad de calcular correctamente la superficie de los campos tras la inundación anual causada por el Nilo, que borraban los lindes (línea o límite territorial) de separación de la tierra y era preciso construir ángulos rectos para dibujarlas. Así, 2500 años antes de Cristo lograron trazar perpendiculares, con segmentos que forman un ángulo recto.

En su versión más genuina, el teorema de Pitágoras tiene el siguiente enunciado:

Dado un triángulo de vértices ABC , el ángulo A es recto (triángulo rectángulo) si y sólo si el área del cuadrado sobre el lado a , opuesto a A , es la suma de las áreas de los cuadrados sobre los otros dos lados b y c ($a^2 = b^2 + c^2$)

Aparte de las comprobaciones numéricas y demostraciones algebraicas, existe una gran variedad de demostraciones geométricas.

El teorema de Pitágoras es esencial en el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de figuras. También podemos utilizar este teorema si introducimos coordenadas cartesianas en el plano (y en el espacio) para definir la distancia entre dos puntos.

La relación pitagórica se encuentra en todo cálculo donde se usan funciones, al considerar las gráficas $y = f(x)$ en referencias cartesianas. Además, impregna la totalidad de la trigonometría. A la medida de los ángulos de un triángulo rectángulo se asocian las funciones seno, coseno, tangente, etc. De modo que en un triángulo ABC , rectángulo en A , se tiene $\operatorname{sen}(B) = \frac{a}{b}$ y $\cos(B) = \frac{a}{b}$, con lo cual, por el teorema de Pitágoras, $\operatorname{sen}^2(B) + \cos^2(B) = 1$.

A causa de ello Pitágoras también está presente en la topografía, en todos los problemas de mediciones de terreno; en la cartografía, para elaborar mapas; en los problemas de navegación marítima o aérea, y también en arquitectura, ingeniería y todo tipo de oficios donde se requieran medidas y cálculos.

Razones trigonométricas

De acuerdo con Mendoza (2020), la trigonometría tiene como objeto de estudio las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos, así como las funciones asociadas a los ángulos, conocidas en la literatura especializada como funciones trigonométricas. Esta rama de las matemáticas, según afirman Arhin y Hokor (2021), constituye una parte esencial del currículo de matemáticas en la educación secundaria en la mayoría de los países a nivel mundial,

debido a que articula el álgebra, la geometría y el razonamiento gráfico, al mismo tiempo que es un prerrequisito para el cálculo y otras disciplinas como la física.

La trigonometría puede abordarse desde diversas perspectivas considerando que se refiere al estudio de las proporciones entre los lados y ángulos de un triángulo ya sea en el plano o una esfera. Etimológicamente, la palabra procede del griego clásico y significa medición de triángulos. La importancia de esta rama radica, fundamentalmente, en la medición de campos, la ubicación de barcos en el mar o, más recientemente el posicionamiento por satélite, e incluso la medición de distancias entre estrellas próximas en la astronomía.

La trigonometría fue desarrollada por astrónomos griegos que consideraban al cielo como el interior de una esfera, de modo que resultó natural estudiar primero los triángulos sobre una esfera (por Menélao de Alejandría) y que los triángulos en el plano fueran estudiados mucho después. Así, el origen de los estudios de la trigonometría se dio a causa de que muchos hombres estudiaron primero la esfera celeste, en el cual se suponía que se desplazaban el Sol, la Luna y las estrellas, y cuya posición se calculaba mediante la medición de ángulos. Los dos hombres famosos que se interesaron más por esos estudios fueron los astrónomos griegos Hiparco de Nicea (Siglo II a. C.) y Claudio Ptolomeo (Siglo II d.C.).

Para definir las razones trigonométricas del ángulo α , del vértice A, se parte de un triángulo rectángulo arbitrario que contiene a este ángulo. El nombre de los lados de este triángulo rectángulo que se usará en lo sucesivo será:

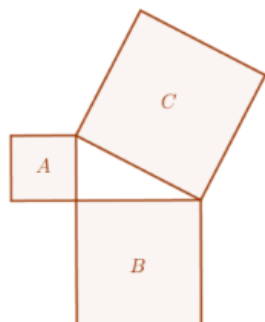
- La hipotenusa (h) es el lado opuesto al ángulo recto, o lado de mayor longitud del triángulo rectángulo;
- El cateto opuesto (a) es el lado opuesto al ángulo α ;
- El cateto adyacente (b) es el lado adyacente al ángulo α .

Fundamentos didácticos

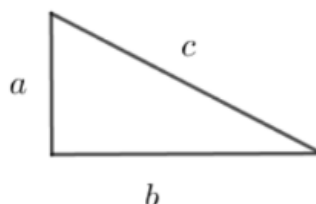
Chambers (1999) reflexiona sobre la enseñanza del Teorema de Pitágoras en un artículo breve orientado a presentar las diferentes opciones que pueden considerar los docentes, así como la posibilidad de emplear el teorema como un acercamiento a la idea de prueba en matemáticas. De esta manera, comienza explorando distintas formas de presentarlo:

1. Sin dibujo. *El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.* Este enunciado suele usarse en conjunción con otros, ya que por sí solo no parece muy adecuado.

2. Como una relación entre áreas, $C = A + B$, acompañada por un dibujo como el de la Figura 1.



(a) Relación de áreas.



(b) Lados.

Figura 1. Representaciones empleadas para introducir el teorema de Pitágoras

3. Con el dibujo de un triángulo rectángulo en el que se han etiquetado los lados (sus longitudes) (Figura 1(b)) y que da pie a tres posibles enunciados:

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

En el trabajo *El teorema de Pitágoras, pretexto y contexto para la enseñanza de la geometría*, la autora presenta una propuesta didáctica para la enseñanza del Teorema de Pitágoras haciendo, entre otros, uso de elementos históricos y tecnológicos. Parte de la conceptualización teórica del modelo de Van Hiele, el cual explica el avance en el razonamiento geométrico de los estudiantes. Este avance lo dividen en cinco niveles, el primero es de visualización o reconocimiento, el segundo es de análisis, le sigue la deducción informal y la deducción formal, se termina con el rigor. Los estudiantes deben pasar por todos los niveles anteriormente mencionados y en el orden establecido cada vez que se enfrenten a un aprendizaje nuevo.

Su objetivo consistió en la realización de diferentes talleres en los que los estudiantes pudieran afianzar el conocimiento progresivamente, pasando por todas las etapas del modelo de Van Hiele. Es decir, se busca que los estudiantes refuercen los conocimientos de áreas de figuras planas, las apliquen en la demostración del Teorema de Pitágoras; se espera que los estudiantes puedan aprender conceptos de congruencia, semejanza, geometría del círculo, que apliquen el Teorema de Pitágoras en la solución de problemas prácticos y en una demostración del Teorema del seno y del coseno. Por último, se espera que los estudiantes tengan un acercamiento a algunos resultados propuestos por Fermat relacionados con el Teorema de Pitágoras.

Algunas de las conclusiones obtenidas mediante el trabajo realizado fueron las siguientes:

- La historia como recurso didáctico en la enseñanza de cualquier concepto matemático es importante, ya que enriquece el concepto y le da sentido al estudiante, porque le muestra cómo funciona la ciencia, ya que al conocer la historia va conociendo cómo, o qué motivó a la humanidad a desarrollar los conceptos que se están aprendiendo;
- Un obstáculo que se presenta en el aprendizaje del Teorema de Pitágoras por parte de los estudiantes, es el mismo que tuvieron los pitagóricos: los estudiantes se

acostumbran a que el teorema sólo arroja resultados enteros. Y genera un poco de conflicto en ellos cuando se empiezan a poner resultados que no son enteros;

- El uso de software geométricos acerca el concepto a los estudiantes a su era. Es decir, en un mundo tecnológico si se siguen enseñando los conceptos de la misma forma que se enseñaban hace cincuenta años y sin usar las herramientas que tenemos hoy en día, el estudiante no le emocionará aprender un concepto. Mientras que si se le muestra que la tecnología le facilita la construcción de figuras y que le permite observar resultados de manera sencilla, se sentirá más a gusto en el aprendizaje.

Por otro lado, Vitola de la Rosa (2023) realizó un análisis de dieciocho tesis doctorales en las cuales se estudia el abordaje de la trigonometría en diferentes niveles educativos. Como afirma en su trabajo, “Montiel (2006), identifica varios contextos para el abordaje de la trigonometría, los cuales se van desarrollando de manera secuencial a lo largo del currículo de matemáticas en los diferentes niveles de formación. En primer lugar, se trabajan las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, para posteriormente, abordar la trigonometría del círculo unitario, la cual permite realizar la transición hacia las funciones trigonométricas y sus representaciones gráficas. La multiplicidad de representaciones de los objetos matemáticos involucrados en la trigonometría, al igual que la transición entre los diferentes contextos trigonométricos, contribuye con las dificultades que se presentan en el aprendizaje y en la enseñanza de esta unidad temática, que son objeto de estudio de la educación matemática”.

Algunos de los resultados hallados son los siguientes:

- McMillian Jenkins (2022) analiza el impacto de la utilización de los computadores y las herramientas tecnológicas en la enseñanza de la trigonometría en la educación secundaria, concluyendo que las herramientas tecnológicas son un factor fundamental para la motivación del estudiante hacia el estudio de estos temas. En el mismo sentido, Lupahla (2020) evidencia con su investigación el impacto positivo que tiene la implementación de una enseñanza de las funciones periódicas en la educación secundaria basada en modelos implementados en Excel, en el desarrollo del conocimiento tecnológico y pedagógico de los docentes;
- Otro autor que hace referencia a la utilización de la tecnología en la enseñanza de la trigonometría es Weber (2006), quien con su trabajo demostró las ventajas que representa el uso de los computadores para la exploración de las relaciones geométricas y numéricas entre los diferentes conceptos de la trigonometría, privilegiando así la comprensión sobre el aprendizaje memorístico y mecánico que se observa en la formación tradicional. Este autor recomienda que la enseñanza haga énfasis en lo conceptual, en las múltiples representaciones y relaciones existentes entre los conceptos trigonométricos, en el modelamiento matemático y en la solución de problemas;
- Gur (2009) considera que el origen de los errores del estudiante está en las concepciones erróneas y en los obstáculos que se presentan en las lecciones de

trigonometría, entre los cuales se encuentran el mal uso de los datos, la mala interpretación del lenguaje, inferencias lógicas inválidas, definiciones distorsionadas y errores técnicos mecánicos.

Fuentes curriculares

En los Materiales Curriculares de La Pampa, se expresan contenidos y objetivos, en relación al abordaje del Teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas, lo presentado a continuación:

- El análisis y construcción de figuras y el análisis de cuerpos argumentando en base a propiedades en situaciones problemáticas que requieran analizar las relaciones entre lados de triángulos cuyas medidas sean ternas pitagóricas e interpretar algunas demostraciones del Teorema de Pitágoras basadas en equivalencia de áreas;
- La comprensión del proceso de medir y calcular medidas en situaciones problemáticas que requieran elaborar y comparar distintos procedimientos para calcular perímetros y áreas de polígonos;
- El uso de ecuaciones y otras expresiones algebraicas en situaciones problemáticas que requieran:
 - argumentar sobre la validez de afirmaciones que incluyan expresiones algebraicas analizando la estructura de la expresión;
 - transformar expresiones algebraicas, usando diferentes propiedades, al resolver ecuaciones de primer grado.
- El análisis y construcción de figuras y cuerpos argumentando en base a propiedades en situaciones problemáticas que requieran:
 - construir figuras semejantes a partir de diferentes informaciones e identificar las condiciones necesarias y suficientes de semejanza entre triángulos;
 - usar la proporcionalidad entre segmentos que son lados en triángulos rectángulos caracterizando las relaciones trigonométricas: seno, coseno y tangente;
 - formular conjeturas sobre propiedades de las figuras (en relación con ángulos interiores, bisectrices, diagonales, entre otras), y producir argumentos que permitan validarlas.
- La construcción de figuras semejantes para que a partir de ellas y sus propiedades, se reconozcan y exploren razones trigonométricas y relaciones entre segmentos de triángulos y circunferencias.

PROPUESTA IMPLEMENTADA

En esta sección se presentarán algunas de las actividades realizadas en la práctica, seleccionadas por la diversidad de razonamientos utilizados para responder a ellas y por la discusión y el trabajo matemático que permitieron.

El estudio del Teorema de Pitágoras se inició con la actividad inicial propuesta por Pablo Beltrán-Pellicer (2022), a la cual se le añadió información sobre el geoplano, como se puede observar en la Figura 2.

Un geoplano es un tablero con una cuadrícula de puntos, generalmente clavos, donde se pueden colocar bandas elásticas para formar figuras geométricas. La unidad de área en el geoplano será la del cuadrado más pequeño que pueda obtenerse al unir cuatro puntos. A esta unidad la llamaremos unidad cuadrada. Asimismo, la unidad de longitud será la distancia vertical u horizontal entre dos puntos consecutivos.

Esto (Figura 2) es un cuadrado de tipo (3, 5). El primer número es el desplazamiento en horizontal que hacemos desde un punto fijo para hallar uno de los vértices del cuadrado. El segundo, el desplazamiento en vertical para obtener un vértice contiguo al anterior. Y así tenemos un lado del cuadrado. Encontrá el área de este cuadrado y explicá cómo lo hiciste.

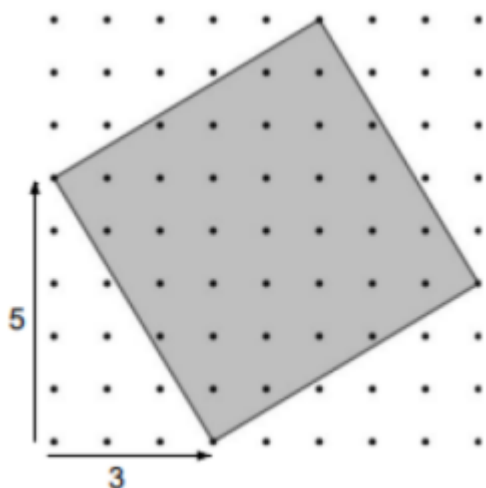


Figura 2. Cuadrado de tipo (3,5)

Esta primera actividad fue de gran dificultad para el alumnado. Algunos estudiantes recordaban algo de cálculo de área de años anteriores, como que el área del cuadrado se calcula multiplicando la medida de la base por la de su altura. Pensando en eso, aproximaron la medida del lado del cuadrado inclinado, ya sea contando puntos, midiendo, o intuyendo según lo que ellos creían. Hubo dos alumnas que afirmaban que si ese cuadrado "se caía", el vértice inferior se mantendría en su lugar y el de la derecha coincidiría con el vértice inferior derecho del cuadrado mayor. Entonces el lado del cuadrado inclinado tendría que ser de 5 unidades. También había confusiones entre área y perímetro.

Sin embargo, de manera general tardaron en entender la consigna, y no se comprendió qué era la unidad cuadrada. Luego, con ayuda, se resolvió con la estrategia de restar el área de los triángulos al área del cuadrado mayor.

Esta actividad se llevó a cabo durante un módulo de clase. Concluí que debería haber sido más clara con la consigna, y tener un apoyo visual. Por eso, para la siguiente clase elaboré un geoplano para el pizarrón.

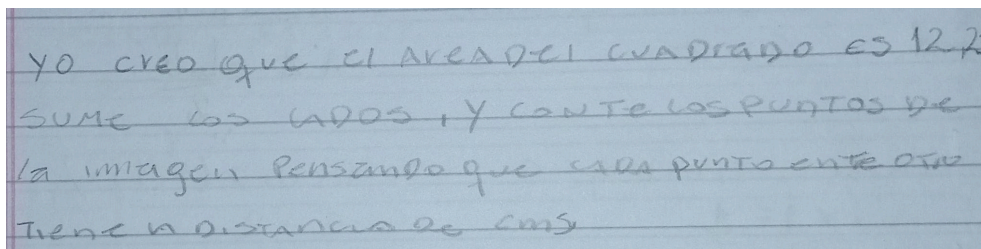


Figura 3. Resolución de la actividad 1 por una estudiante

La actividad que se presenta a continuación buscaba que los y las estudiantes generalicen la estrategia utilizada para casos concretos, y así aproximarnos al Teorema de Pitágoras.

Actividad 4: Camino a la generalización

a) Completá la siguiente tabla con las áreas de los cuadrados (x, y) , en los cuales ahora varían ambos valores.

Notemos que la sucesión de áreas de la tarea anterior es la columna correspondiente a $x = 1$. En la columna de “comentarios” podés escribir conclusiones que hagan mientras completan la tabla o atajos de cálculo que te sean útiles.

b) Construí la fila correspondiente a y con valor 10.

c) Escribí una fórmula para calcular el área de un cuadrado de tipo (x, y)

	y	1	2	3	4	Comentarios
x						
1						
2						
3						
4						

Tabla I. Tabla a completar en la actividad 4

Esta actividad demandó mayor tiempo de lo planificado, ya que la realizamos en dos clases. Sin embargo, esto se debe a que había muchos estudiantes que no asistían con continuidad. De todos modos, esto permitió que, a su ritmo, todos completaran el cuadro.

Además, como en la clase anterior no se escuchaban entre ellos, dispusimos los bancos en forma de semicírculo. Así, la comunicación se distribuyó mejor, y los que suelen trabajar solos esta vez lo hicieron con un compañero o una compañera. Pero no podía realizarse así

todas las clases, dado que se trataba de un curso numeroso y los bancos eran para dos personas.

El ítem b) lo resolvieron sin inconvenientes. No obstante, frente a la pregunta “¿Podremos encontrar una fórmula para hallar el área de los cuadrados inclinados?”, me miraron con desconcierto. Una estudiante respondió: “Seguro que hay una fórmula, pero no la conocemos”, lo que me da a entender que comprenden las fórmulas como un conocimiento que sólo reciben; no conciben que puedan construirlo. Por eso, esta parte la hicimos en el pizarrón de modo que ellos fueran encontrando la fórmula.

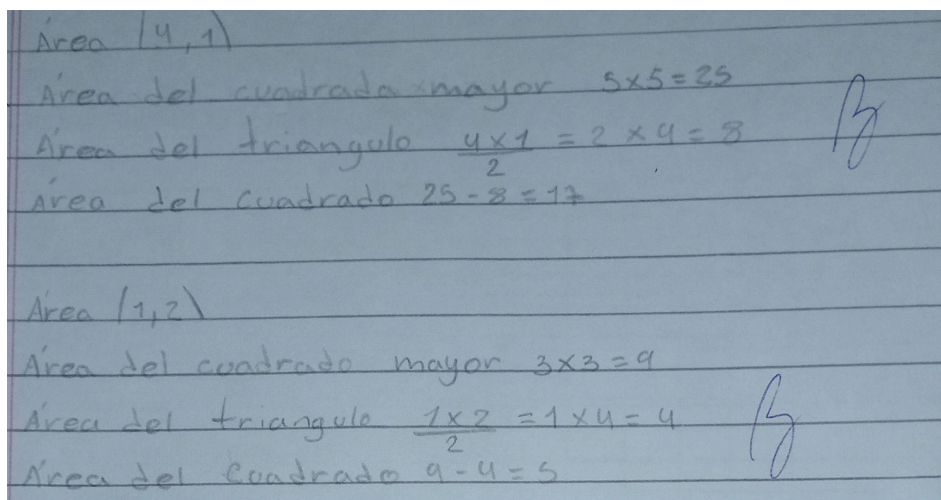


Figura 4. Cálculos de áreas de la actividad 4

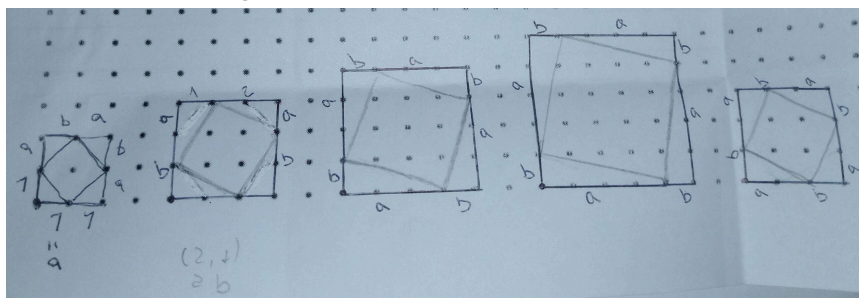


Figura 5. Algunos gráficos de la actividad 4

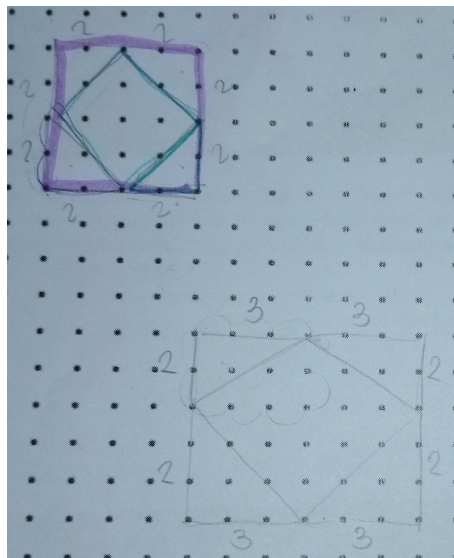


Figura 6. Cuadrado (2,2) y un cuadrado (2,3) donde se cuenta incorrectamente los puntos y se grafica en espejo.

Finalmente, se instituyó el Teorema de Pitágoras con la actividad de comparación de áreas presentada en la Figura 7.

- Compará las áreas de la parte sombreada de cada imagen (imagen 7) y explicá el método que has usado para compararlas.
- ¿Cuál será el área de cada una de las regiones sombreadas?

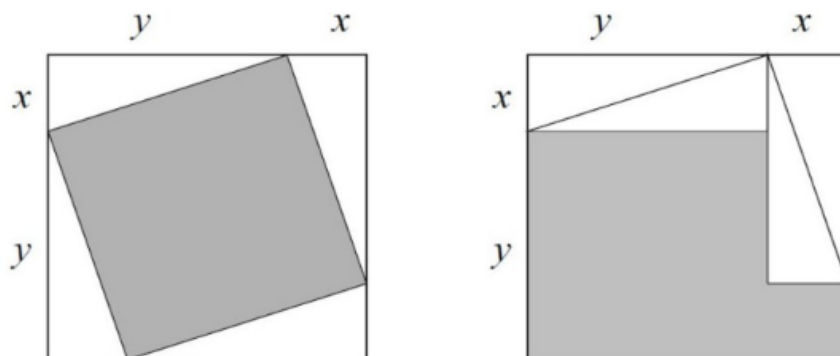


Figura 7. Actividad para comparar áreas

La misma resultó ser de mayor dificultad de lo que había previsto. Guía mediante, los/as estudiantes lograron comprender que las áreas sombreadas eran iguales y argumentarlo. También fue necesario guiarlos para responder la segunda consigna. En la Figura 8, se registra una respuesta común en el estudiantado.

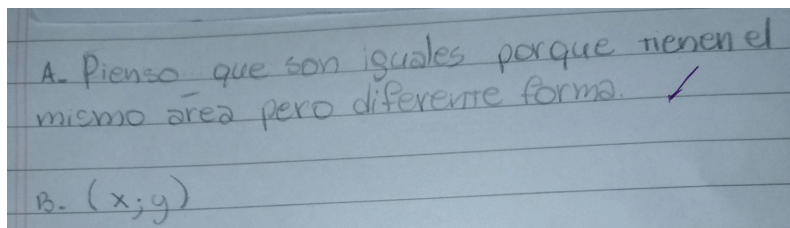


Figura 8. Respuesta recurrente de los/las estudiantes a la actividad 5

Por otra parte, el abordaje de las razones trigonométricas se llevó adelante mediante la modelización a partir de montañas rusas. Para ello se introdujo el tema con la siguiente actividad, en la que se buscaba comparar ángulos a partir de la construcción de “montañas rusas” con palitos de brochete, hilo y plastilina.

El Adrinatlón

Primera parte

Se quiere construir el “Adrinatlón”: un parque de diversiones cuya principal atracción sean diferentes montañas rusas. La condición es que sean lo suficientemente empinadas para causar adrenalina. Para eso, se necesita saber:

- ¿Cuándo una montaña rusa es más empinada que otra?
- Si dos montañas tienen la misma altura, ¿es más empinada la que tiene mayor o menor recorrido?
- Y si el recorrido es el mismo, ¿es más empinada la más alta o la más baja?

Pueden usar palitos, hilo y plastilina para construir maquetas de montañas rusas y responder las preguntas.

Segunda parte

Finalmente se construyó el Adrinatlón. Luna y Simon fueron y les entregaron un folleto de montañas rusas que muestran la parte “más divertida y peligrosa” de ellas. Simón quiere ir a la más empinada ¿Cuál debe elegir entre la Vértigo y Sapucay? ¿Y entre Huracan y Vértigo?

Para esta actividad se entregó a cada estudiante los materiales mencionados para que construyan sus montañas rusas y así conjeturen. Luego se fueron anotando las respuestas de los alumnos en el pizarrón. Para la segunda parte, se repartieron los folletos a cada alumno. Al terminar se realizó la puesta en común.

En un primer momento los y las estudiantes no comprendían cómo hacer las montañas, ya que ellos imaginaban una montaña rusa con varias pendientes, mientras que yo esperaba que simularan sólo una de las caídas. Luego, guía mediante, las construyeron y compararon. Las respuestas que surgían eran muy variadas, pero logramos plasmar dos conclusiones en el pizarrón: “Si la altura es igual, es más empinada la montaña rusa de menor recorrido”, y “Si el recorrido es el mismo, es más empinada aquella de mayor altura”. También fue posible recuperar las nociones construidas sobre semejanza.



**VENÍ A CONOCER
 ADRINATLÓN**

El parque con más adrenalina
 del mundo

+ de 10 montañas rusas para
 gritar hasta quedarte sin voz

HURACÁN
 12 m de altura - 20 m de recorrido

VÉRTIGO
 24 m de altura - 68 m de recorrido

AVALANCHA



SAPUCAY
 30 m de altura - 34 m de recorrido

SUPERNOVA



Figura 9. Folleto de montañas rusas

8. CUANDO ESTA MAS HABAJO EL NILO SE HACE MAS IMPINADA
 • LA QUE TIENE MENOR RECORRIDO.
 EL RECORRIDO ES EL MISMO ES MAS EMPINADA LA MAS ALTA

Figura 10. Respuesta de una estudiante

8. a. Una montaña es mas empinada que otra cuando esta mas inclinada
 8b. ES MAS EMPINADA LA QUE TIENE MENOR recorrido
 8c. La que tiene mas altura
 9. Debe elegir la Sapucay, Porque al tener menor altura y recorrido, se vuelve mas empinada y peligrosa
 10. Entre la huracan y vertigo, ES mas peligrosa y empinada la huracan Porque tiene menos recorrido

Figura 11. Algunas conjeturas

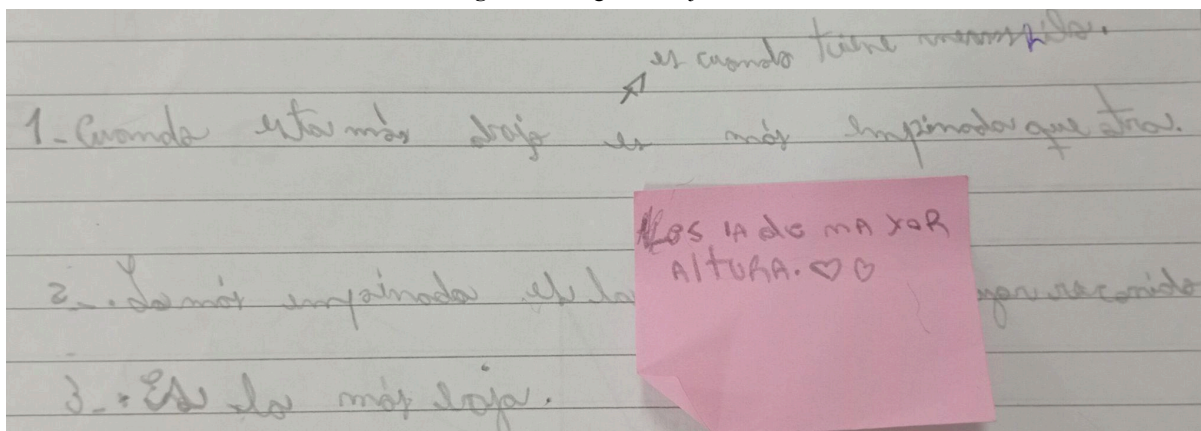


Figura 12. Conjeturas de una estudiante

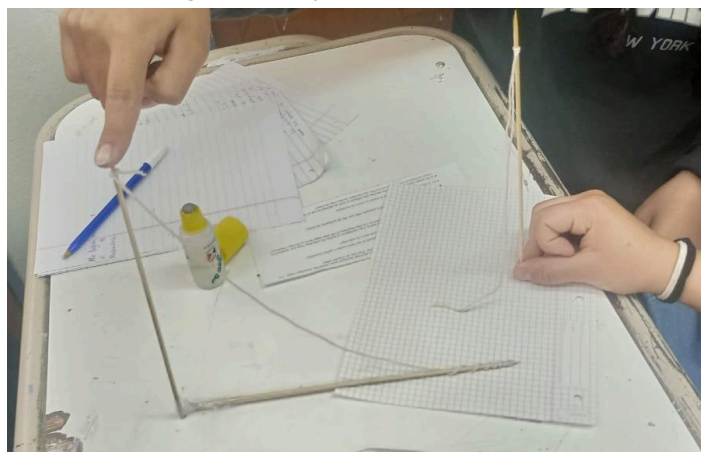


Figura 13. Maqueta de montaña rusa

La siguiente actividad se propuso como integración de todo el trabajo sobre Teorema de Pitágoras y razones trigonométricas. Se trataba de una consigna a resolver en grupos de dos o tres integrantes durante un módulo de clase, a carpeta abierta.

Trabajo final: ¡Manos a la obra!

1) Construyan una pista de bolitas que cumpla las siguientes condiciones:

- La posición inicial de la bolita debe ser a 15 cm de altura.
- La bolita debe recorrer por lo menos 20 cm, pero no más de 26 cm.
- El largo de la base del tablero debe ser de 20 cm.
- Debe incluir dos rampas distintas.
- La altura de una de las rampas debe medir 7.5 cm, y el ángulo que forma con la rampa debe ser de 55° .

2)

a) Escriban un instructivo que explique paso a paso cómo construir la pista que crearon.

b) ¿Cómo obtuvieron las medidas a utilizar? ¿por qué esas medidas y no otras?

c) ¿Hay alguna de las medidas que podría haberse hallado de otra manera? ¿Cómo? (No hace falta que lo resuelvan nuevamente; sólo indiquen qué otro procedimiento podría haberse seguido).

Recomendaciones: Hagan dibujos de la posible rampa y los cálculos correspondientes antes de empezar a construir.

La consigna era la misma para todos los grupos, pero los valores de la última condición para construir la pista variaban.

El día en cuestión asistieron 17 estudiantes, los cuales dividí en 7 grupos de dos o tres integrantes. Uno de los grupos no quiso realizar el trabajo.

A todos los grupos les llevó gran parte de la clase comprender la consigna e interpretar los datos. Por ejemplo, dibujaban dos rampas separadas, y en una de ellas asignaban 15 cm a la altura y 20 cm a la base. Uno de los grupos consideró, en un primer momento, incluir tramos horizontales en la pista (Imagen 17). Considero que si hubiera incluido un esquema de la pista les hubiera costado menos la interpretación.

Con guía lograron empezar a resolver, con distintos grados de dificultad:

- Uno de los grupos no comprendía que debía utilizar razones trigonométricas, pero les era evidente que el Teorema de Pitágoras no iba a alcanzar.
- Un grupo de alumnas, por el contrario, intentaban resolver con razones trigonométricas una situación en donde se podía aplicar el Teorema de Pitágoras. Hallaron un ángulo, lo cual no era necesario.
- Dos estudiantes no identificaban bien el cateto opuesto y el adyacente, por lo que no estaban eligiendo correctamente la razón trigonométrica.
- Tres alumnos hallaron todas las medidas y, al sumar los recorridos, obtuvieron un resultado mayor a 26 cm. Esto les permitió darse cuenta que habían estado arrastrando un error y corregirlo.
- Un grupo tenía dificultades para plantear y resolver las ecuaciones, por lo que toda la resolución les resultó compleja.

En general, era notorio que los y las estudiantes pensaban qué estrategias utilizar antes de identificar qué debían encontrar. Además, como se aprecia en la imagen 18, la mayoría no consideró otras estrategias posibles.

Sólo dos grupos lograron realizar o empezar las construcciones, por lo que se decidió extender el trabajo una clase más.

La siguiente clase fueron todos esos mismos estudiantes, y tres alumnas más, que formaron otro grupo y realizaron el trabajo. Son estudiantes de baja asistencia, y eso se notó en la resolución porque no entendían qué calcular, la utilidad del ángulo, ni reconocían los lados del triángulo rectángulo.

En el resto de los trabajos dejé preguntas para que lo pudieran revisar y seguir pensando. Tenían la oportunidad de corregir errores para la construcción de las rampas y explicar los procedimientos oralmente si hubiera confusión en los instructivos.

Al grupo que había estado presente la clase previa pero no había realizado el trabajo les propuse finalizar el trabajo práctico de repaso, pero tampoco lo iniciaron.

Uno de los grupos realizó una sola rampa, de 20 cm de base y 15 cm de altura. Querían colocar dos cartones en el medio para formar las dos rampas, pero les hice notar que eso no iba a cumplir con las medidas que encontraron, dado que los ángulos no serían los mismos.

Este último trabajo proponía integrar todos los saberes en una actividad práctica. En ella los y las estudiantes debían ir más allá de la aplicación mecánica de fórmulas: tenían que identificar datos dados como información; entender qué resultados debían obtener para resolver el problema; debatir sobre posibles estrategias; calcular utilizando lo aprendido en clase. Una vez elaborada la primera parte, debían reflexionar sobre el trabajo realizado, reconociendo los procedimientos llevados a cabo y las estrategias implementadas, y argumentar las decisiones tomadas con conocimiento y lenguaje matemático.

Este desarrollo fue acompañado de un ambiente más ameno. El primer día no fue posible por el tiempo meteorológico, pero el segundo día trabajamos en el patio, de forma distendida. Cada grupo se ubicó en un lugar donde estuviera cómodo y al finalizar, nos dispusimos en ronda para compartir lo trabajado.

PASO 1: $\cos 60^\circ = \frac{AD}{15}$ / Por qué eligieron coseno?

PUSIMOS $\cos 60$ Y NOS DIO 0,5. 15 NOS DIO 7,5

PASO 2: $\sin(60)$ / Por qué eligieron seno?
 $\sin 60 = \frac{60}{V}$ NOS DIO 0,86
 Y DESPUES PUSIMOS 0,86. 15 Y NOS DIO 12,9

PASO 3: $h^2 = 4,5^2 + 4,12$ / ¿Qué utilizaron en este cálculo?
 $h^2 = 56,25 + 50,41$ / ¿Por qué eligieron ese procedimiento?
 $h^2 = 106,66$
 $h = \sqrt{106,66}$
 $h = 10,32$

¿Cómo tendría que tener en cuenta esos resultados y cálculos para construir la pista de rampas?

Figura 14. Explicación insuficiente del paso a paso

Lo primero que hicimos fue crear una sola rama que se dividía en 2, la base tenía que ser de 20cm y la altura 15cm en total.
Base: uno de los triángulos que dibujamos obtuvo un total de 13cm, y el otro triángulo tenía una base de 7cm ya que la suma nos da 20 cm.

Figura 15. Instructivo claro, ordenado y preciso (a)

Altura: en base en uno de los triángulos usamos las Razones Trigonométricas (cos) y el resultado final del (cos) que fue 7,5 se lo restamos a la altura inicial dándonos un resultado de 7,5 también para el Primer triángulo.

B) Según los datos que nos dio la actividad utilizamos distintos métodos como el teorema de Pitágoras y razones trigonométricas, llevándonos a los números que nos dieron.

c) si hay otras maneras de resolverlo ✓
¿Cuál, por ejemplo?

Figura 16. Instructivo claro, ordenado y preciso (b)

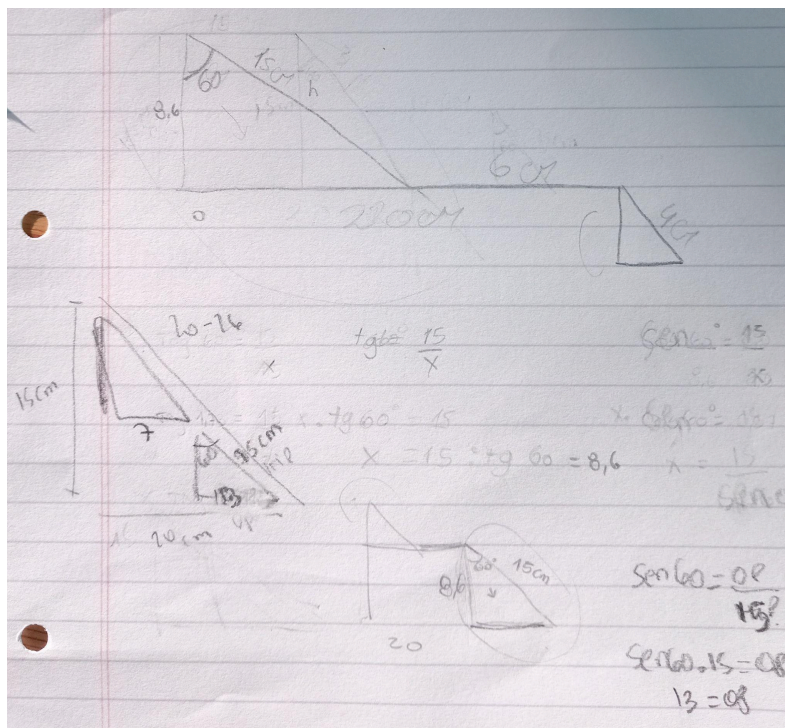


Figura 17. Pista de bolitas incluyendo tramo horizontal

c) No hay otra manera porque no usa el resultado
 ; No podía obtener ese resultado de otra manera, tal vez
 3- con alguna otra razón trigonométrica?

Figura 18. Respuesta recurrente sobre posibilidades de solución



Figura 19. Algunas de las construcciones realizadas

REFLEXIONES FINALES

A lo largo de este trabajo hemos podido arribar a algunas respuestas a las preguntas realizadas al inicio. Encontramos que el Teorema de Pitágoras se puede construir utilizando el geoplano como medio, y para la enseñanza de las razones trigonométricas será útil proponer un modelo que resulte conocido e interesante a los y las estudiantes, y en el cual deban comparar ángulos, de modo que las mismas surjan como relaciones entre lados de triángulos rectángulos.

En cualquier caso, las investigaciones dan cuenta de la importancia de utilizar mediadores tecnológicos y materiales manipulables, y del trabajo cognitivo detrás de las demostraciones del Teorema de Pitágoras. Las fuentes curriculares, además, resaltan la importancia de las relaciones métricas en los triángulos rectángulos y su modelización.

Para posteriores análisis, sería interesante preguntarse, ¿cómo realizar un trabajo interdisciplinario en el cual la matemática tome parte mediante los saberes aquí abordados? ¿Qué problemática social, cercana a los y las estudiantes y de su interés, podría estudiarse a partir del Teorema de Pitágoras o de las razones trigonométricas?

REFERENCIAS

- Beltrán Pellicer, P. (2022). *Matemáticas en las aulas de Secundaria*. La Gaceta de la RSME, Vol. 25, Núm. 1, Págs. 149–169.
- Chambers, P. (1999). *Teaching Pythagoras' theorem Mathematics in School* 28, n° 4, 22–24.
- Corbalán, F. (2010). *La proporción áurea: El lenguaje matemático de la belleza*, RBA Libros, España.
- Di Franco, N. (compiladora). (2017). *Relaciones con el saber en las prácticas*. Ediciones Amerindia.
- Di Franco, N. y Di Franco, M.G. (compiladoras). (2019). *Propuestas educativas del Profesorado en Matemática: prácticas de identidad profesional*. Ediciones Amerindia.
- Hernández Cruz, C. (2019). *El teorema de Pitágoras, pretexto y contexto para la enseñanza de la geometría*. Universidad Nacional de Colombia.
- Martyniuk, N. y Caronía, S. (2010). *Una propuesta didáctica: introducción al teorema de Pitágoras*. Universidad Nacional de los Andes.
- Ministerio de Educación de La Pampa. (2009). *Materiales Curriculares para el Ciclo Básico de la Educación Secundaria - Matemática*. Santa Rosa. Gobierno de La Pampa.
https://repositorio.lapampa.edu.ar/repositorio/materiales_curriculares/nivel_secundario/ciclo_basico/mce_mc2009_matematica_123vpreliminar.pdf

Ministerio de Educación de La Pampa. (2013). *Materiales Curriculares para el Ciclo Orientado de la Educación Secundaria - Matemática*. Santa Rosa. Gobierno de La Pampa.

https://repositorio.lapampa.edu.ar/repositorio/materiales_curriculares/nivel_secundario/ciclo_orientado/mce_dc2013_matematica.pdf

Puig Adam, P. (1986). *Curso de Geometría Métrica*. Tomo I: Fundamentos. Euler Editorial S.A.

Sessa, C.(2017). *Hacer matemática 1/2*. Estrada.

Sessa, C. (2017). *Hacer matemática 2/3*. Estrada.

Sewald, J. (2010). *Geometría: Notas de Curso*. Departamento de Matemática. Universidad Nacional del Sur.

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología de la Nación. (2018). *Marco Nacional para la Mejora del Aprendizaje en Matemática*. - 1a ed . - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología.
https://pidigital.abc.gob.ar/sites/default/files/marco_nacional_para_la_mejora_del_aprendizaje_en_matematica-digital64739.pdf

Vitola de la Rosa, F. (2023). *Enseñanza y aprendizaje de la trigonometría: Un abordaje desde las investigaciones doctorales en educación matemática*. Gaceta de pedagogía.