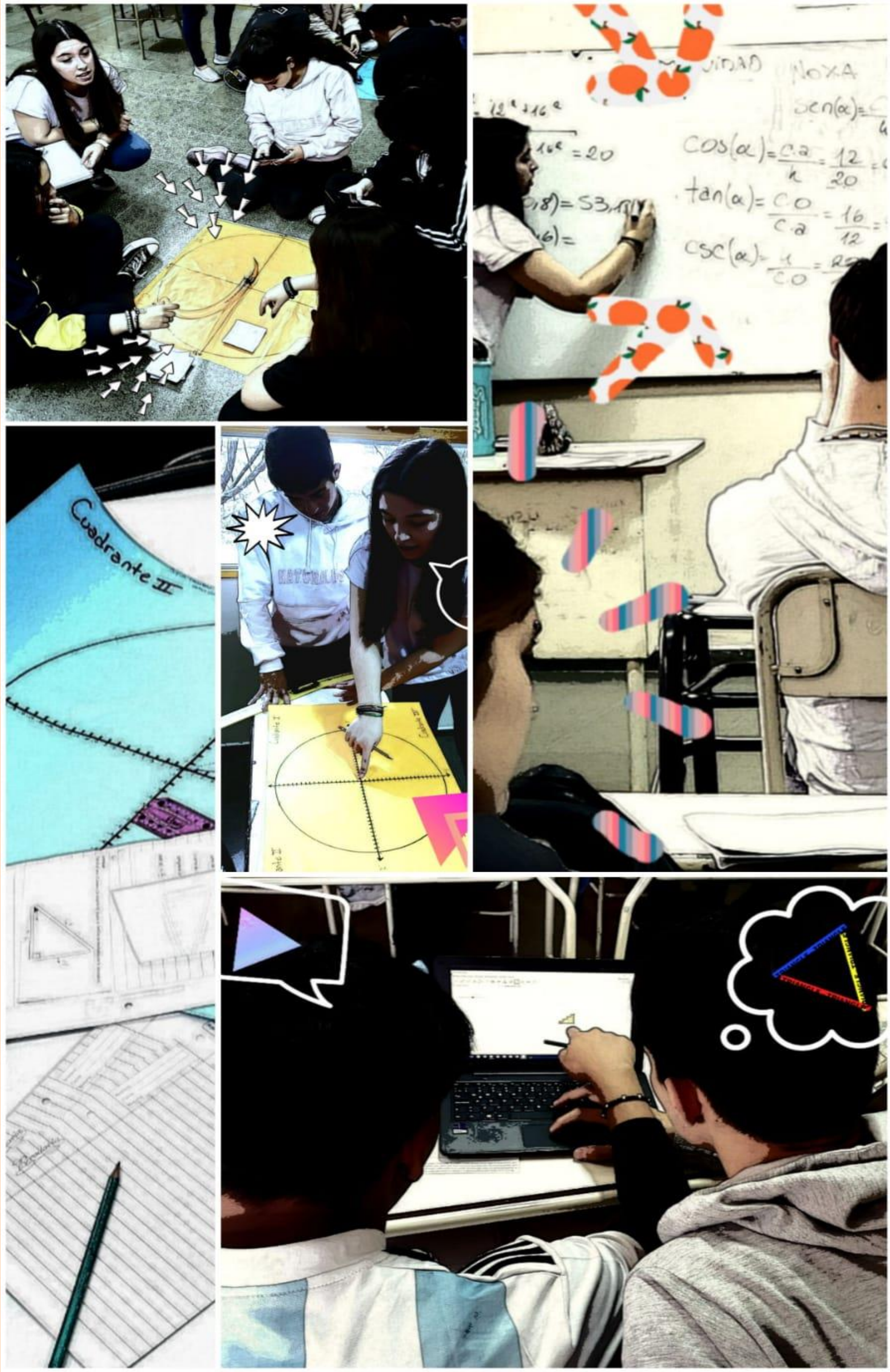

Cuadrante II
sen(α)=
cos(α)= c.a / h = 12 / 20
tan(α)= c.o / c.a = 16 / 12
csc(α)=

Campo de Prácticas
PROFESORADOS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES | UNLPam

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Universidad Nacional de La Pampa
EdUNLPam

Martina Schneider

martisndr@gmail.com

Construyendo escaleras que funcionen como puentes

Campo de Prácticas, Año 2, Nº 1, octubre 2022

Sección: Artículos, pp. 141-163

ISSN 2118-8787.

Construyendo escaleras que funcionen como puentes

Resumen

Este trabajo se realiza en el marco de la residencia de la Práctica Educativa IV del Profesorado en Matemática, se inicia con una investigación que se utiliza para la posterior propuesta de aula que se implementa en un curso de 6°I año de la Educación Secundaria de nuestra provincia, en conceptualizaciones de la trigonometría. El escrito se organiza en una primera parte de revisión de fundamentos matemáticos tomados como referencia. Se rescatan y analizan las definiciones de ángulo, sistemas de medición de ángulos –sexagesimal y radial– y razones y funciones trigonométricas. Luego, en los fundamentos de didáctica de la matemática se revisan distintos documentos e investigaciones a partir de los cuales se recuperan inquietudes, problemáticas y necesidades de la enseñanza y del aprendizaje de los diferentes conceptos seleccionados para la planificación. En relación con las fuentes curriculares, se toma la planificación de la docente a cargo del curso y se compara con la propuesta oficial que sostiene la provincia de La Pampa. Se complementa con instancias de la práctica educativa desarrollada a partir de aquellas referencias. Todo el recorrido invita a seguir reflexionando sobre la importancia de una práctica educativa como toma de decisiones informadas para promover mayores accesos a los conocimientos.

Palabras clave: ángulo, grados y radianes, razones trigonométricas, fundamentos, necesidades de la enseñanza, recursos didácticos

Constructing stairs that function as bridges

Abstract

This work is carried out in the framework of the residency of the Educational Practice IV of the Teacher's Degree in Mathematics, it begins with an investigation that is used for the subsequent classroom proposal that is implemented in a course of 6th year of Secondary Education of our province, in conceptualizations of trigonometry. The paper is organized in a first part of review of mathematical foundations taken as a reference. The definitions of angles, angle measurement systems -sexagesimal and radial- and trigonometric ratios and functions are rescued and analyzed. Then, in the foundations of didactics of mathematics, different documents and researches are reviewed, from which concerns, problems and needs of teaching and learning of the different concepts selected for planning are recovered. In relation to the curricular sources, the planning of the teacher in charge of the course is taken and compared with the official proposal of the province of La Pampa. It is complemented with instances of the educational practice developed from those references. The whole course invites to continue reflecting on the importance of an educational practice as informed decision making to promote greater access to knowledge.

Keywords: angle, degrees and radians, trigonometric ratios, fundamentals, teaching needs, teaching resources

Conceptualizaciones de la trigonometría y sus fundamentos matemáticos

El propósito de este trabajo es profundizar los conocimientos adquiridos durante la formación docente sobre la trigonometría para poder aplicar los mismos en la planificación que se llevará adelante durante la residencia.

Es importante conocer los argumentos que dan fundamento a las conceptualizaciones que se seleccionan para armar una propuesta de aula, así como también sus dificultades/obstáculos/necesidades para la enseñanza y para el aprendizaje de las mismas. Por tal motivo se realiza una revisión y análisis de distintos libros y autores, recopilando la información que nos permita un mayor entendimiento de los conceptos sobre lo que se desean planificar.

En primera instancia, se toman cuatro libros de matemática de los cuales se muestra cómo plantean el trabajo de la unidad o unidades correspondientes a trigonometría.

"...definiremos las funciones trigonométricas, seis funciones que tienen un amplio uso. Hablaremos acerca de su dominio y rango, veremos cómo determinar valores, representarlas gráficamente y desarrollaremos una lista de sus propiedades. Existen dos enfoques ampliamente aceptados para el desarrollo de las funciones trigonométricas: uno usa los triángulos rectángulos; el otro usa los círculos, especialmente el círculo unitario. En este libro desarrollaremos las funciones trigonométricas usando triángulos rectángulos. En la sección 7.5 presentaremos las funciones trigonométricas usando el círculo unitario y mostrando que este enfoque lleva a la definición usando triángulos rectángulos." (Sullivan, 2013, pág. 503)
"El primer tema de este capítulo se refiere a ángulos. A continuación, se introducen funciones trigonométricas usando un método de triángulo rectángulo y luego se definen en términos de un círculo unitario." (Swokowski y Cole, 2011, pág. XII)
"Empezaremos este capítulo con una explicación de los ángulos y dos formas de medirlos. La sección 8.2 se dedicará a definir las funciones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. En la sección 8.4 extendemos estas definiciones a los ángulos generales." (Zill y Dewar, 2012, pág. 355) "La exposición de la sección 8.4 desemboca directamente en una forma más analítica de estudiar la trigonometría, donde coseno y seno se definen como las coordenadas x y y, respectivamente de un punto (x, y) en un círculo unitario. Esta interpretación de seno y coseno nos permite definir las funciones trigonométricas como un número real, en lugar de un ángulo." (Zill y Dewar, 2012, pág. 389)
"Los capítulos de trigonometría de este texto han sido escritos de modo que se puedan enseñar en primer término ya sea el método del triángulo rectángulo o de la circunferencia unitaria." "Funciones trigonométricas: método de la circunferencia unitaria. Este capítulo introduce la trigonometría por el método de la circunferencia unitaria, mismo que resalta el hecho de que las funciones trigonométricas son de números reales, igual que las funciones polinómicas y exponenciales…. Funciones trigonométricas: método de triángulo rectángulo. Este capítulo introduce la trigonometría por el método del triángulo rectángulo, que tiene como base un curso convencional en trigonometría de preparatoria. Otra forma de enseñar trigonometría es entrelazar los dos métodos." (Stewart et al., 2012, pág. XV)

Como se puede analizar, todos los libros presentan dos formas de construir las funciones trigonométricas: con un triángulo rectángulo y con un círculo unitario. Solo Stewart et al. (2012) plantea que la construcción de las mismas se puede iniciar desde cualquier método. Pero el resto de los autores, si bien utilizan ambos, inician desde el triángulo rectángulo y siguen el mismo camino de construcción hasta llegar al círculo unitario, como si cada paso fuera consecuencia del anterior.

A continuación, consideramos las definiciones de ángulos junto con dirección de los ángulos y posición estándar o normal:

Si se trazan dos rayos con un vértice en común, estos forman un **ángulo**. Le llamamos a un rayo del ángulo el **lado inicial** y al otro el **lado terminal**. El ángulo formado se identifica mostrando la dirección y cantidad de rotación a partir del lado inicial al lado terminal. Si la rotación es en contra de las manecillas del reloj, el ángulo es **positivo**; si la rotación es en la dirección de las manecillas del reloj, el ángulo es **negativo**.

Se dice que un ángulo θ está en **posición estándar** si su vértice está en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares y su lado inicial coincide con el eje x positivo.

Imagen 1. (Sullivan, 2013, pág. 504)

En geometría, un **ángulo** se define como el conjunto de puntos determinados por dos rayos, o semirrectas, l_1 y l_2, que tienen el mismo punto extremo O. Si A y B son puntos en l_1 y l_2, como en la figura 1, nos referimos al **ángulo AOB** (denotado $\angle AOB$). Un ángulo puede también ser considerado como dos segmentos de recta finitos con un punto extremo común.

En trigonometría con frecuencia interpretamos a los ángulos como rotaciones de rayos. Empezamos con un rayo fijo l_1, que tiene punto extremo O, y lo giramos alrededor de O, en un plano, a una posición especificada por el rayo l_2. Llamamos a l_1 el **lado inicial**, l_2 es el **lado terminal** y O es el **vértice** de $\angle AOB$. La cantidad o dirección de rotación no está restringida en ninguna forma. Podríamos considerar que l_1 hace varias revoluciones en cualquier dirección alrededor de O antes de llegar a la posición l_2.

Si introducimos un sistema de coordenadas rectangulares, entonces la **posición estándar** de un ángulo se obtiene al colocar el vértice en el origen y hacer que el lado inicial coincida con el eje x positivo. Si l_1 se hace girar en dirección *contraria al giro de las manecillas de un reloj* hasta la posición terminal l_2, el ángulo se considera **positivo.** Si l_1 se hace girar en dirección *de las manecillas*, el ángulo es **negativo.**

Imagen 2. (Swokowski y Cole, 2011, pág. 368)

Un **ángulo** se forma con dos rayos o semirrectas, que tienen un extremo común llamado **vértice**. A un rayo lo llamaremos **lado inicial** del ángulo, y al otro, **lado terminal**. Es útil imaginar al ángulo como formado por una rotación, desde el lado inicial hasta el lado terminal El ángulo se puede poner en un plano cartesiano con su vértice en el origen y su lado inicial que coincida con el eje positivo de las x.

En ese caso se dice que el ángulo está en su **posición normal** o estándar.

Si la rotación es contraria a la de las manecillas del reloj, la medida será *positiva*; si es en el sentido de las manecillas del reloj, la medida será *negativa*.

Imagen 3. (Zill y Dewar, 2012, pág. 356)

Un **ángulo** AOB está formado por dos rayos R_1 y R_2 con un vértice común O
Con frecuencia interpretamos un ángulo como una rotación del rayo R_1 sobre R_2. En este caso, R_1 recibe el nombre de **lado inicial** y R_2 es el **lado terminal** del ángulo. Si la rotación es en el sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, el ángulo es considerado como **positivo** y, si es en el sentido de las manecillas del reloj, el ángulo es considerado como **negativo**.
Un ángulo está en **posición normal** si está trazado en el plano xy con su vértice en el origen y su lado inicial en el eje positivo x.

Imagen 4. (Stewart et al., 2012, pág. 434 y 435)

Como podemos observar todos los libros definen al ángulo de manera similar, salvo el segundo libro que realiza una diferenciación entre la definición de ángulo en geometría y la definición de ángulo en trigonometría. Al definir al ángulo como rotación de rayos permite una mejor interpretación de la positividad o negatividad del mismo. En cambio, al definirlo como dos segmentos de recta finitos con un punto extremo en común, resulta más estático y se puede generar una confusión con respecto a la medida del ángulo y la longitud de los segmentos que lo componen.

Con respecto al sistema sexagesimal de medición de ángulos se toman las siguientes definiciones:

Los ángulos se miden determinando la cantidad de rotación que se necesita para que el lado inicial coincida con el lado terminal.
Se dice que el ángulo que se forma por exactamente una rotación del lado inicial en la dirección opuesta a las manecillas del reloj hasta que coincida consigo mismo (1 revolución) mide 360 grados, que se abrevia como 360°. **Un grado, 1°**, es $\frac{1}{360}$ de revolución.
Aunque se pueden obtener subdivisiones de un grado usando números decimales, también podemos usar la notación de *minutos* y *segundos*. **Un minuto**, que se denota por **1′**, se define como $\frac{1}{60}$ de grado. **Un segundo**, que se denota por **1″**, se define como $\frac{1}{60}$ de minuto o, equivalentemente, $\frac{1}{3600}$ de grado.

Imagen 5. (Sullivan, 2013, pág. 505 y 506)

Una unidad de medida para los ángulos es el **grado.** El ángulo en posición estándar obtenido por una revolución completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj mide 360 grados, que se escribe 360°; por tanto, un ángulo de un grado (1°) se obtiene por $\frac{1}{360}$ de toda una revolución en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Si se requieren medidas menores de un grado, podemos usar décimas, centésimas o milésimas de grado. En forma opcional, podemos dividir el grado en 60 partes iguales, llamadas **minutos** (denotados por ′), y cada minuto en 60 partes iguales, llamadas **segundos** (denotados por ″). Por tanto, $1° = 60'$ y $1' = 60''$.

Imagen 6. (Swokowski y Cole, 2011, pág. 368 y 369)

La medición de un ángulo en **grados** se basa en la asignación de 360 grados (se escribe 360°) al ángulo formado por una rotación completa en sentido contrario al de las manecillas del reloj Entonces, otros ángulos se miden en función de un ángulo de 360°, y un ángulo de 1° es el que se forma por $\frac{1}{360}$ de una rotación completa.

Con las calculadoras es conveniente expresar las fracciones de grados con decimales, por ejemplo, 42.23°. Sin embargo, tradicionalmente las fracciones de grados se han expresado en **minutos** y **segundos**, donde

$$1° = 60 \text{ minutos (se escribe } 60')^* \quad (1)$$

y

$$1' = 60 \text{ segundos (se escribe } 60'') \quad (2)$$

Imagen 7. (Zill y Dewar, 2012, pág. 356 y 357)

La **medida** de un ángulo es la cantidad de rotación alrededor del vértice para mover R_1 sobre R_2. Intuitivamente, esto es cuánto es lo que "abre" el ángulo. Una unidad de medida para ángulos es el **grado**. Un ángulo de medida 1 grado se forma al girar el lado inicial $\frac{1}{360}$ de una revolución completa.

Imagen 8. (Stewart et al., 2012, pág. 434)

Sullivan (2013) y Stewart et al. (2012), definen la medición de ángulos como la cantidad de rotación que se necesita para que el lado inicial del ángulo coincida con el ángulo terminal. Sullivan (2013), le asigna al ángulo de una rotación la medida de 360° y en base a eso define las subdivisiones de los grados. Swokowski y Cole (2011) y Zill y Dewar (2012) realizan la definición partiendo de la asignación de 360° al ángulo de una rotación completa pero no describen qué implica medir un ángulo.

En relación con el sistema radial de medición de ángulos se toman las siguientes definiciones:

Un **ángulo central** es un ángulo positivo cuyo vértice está en el centro de un círculo. Los rayos de un ángulo central subtienden (intersectan) un arco en el círculo. Si el radio del círculo es r y la longitud del arco subtendido por el ángulo central es también r, entonces la medida del ángulo es de **1 radián**.

Imagen 9. (Sullivan, 2013, pág. 507)

Para definir un ángulo de medida radián, consideremos un círculo de cualquier radio r. Un **ángulo central** de un círculo es un ángulo cuyo vértice está en el centro del círculo. Si θ es el ángulo central que se ve en la figura 6, decimos que el **arco** AP (denotado $\overparen{AP}$) del círculo **subtiende a** θ o que θ **está subtendido por** $\overparen{AP}$. Si la longitud de $\overparen{AP}$ es igual al radio r del círculo, entonces θ tiene una medida de un radián, como en la siguiente definición.

Un radián es la medida del ángulo central de un círculo subtendido por un arco igual en longitud al radio del círculo.

FIGURA 6
Ángulo central θ

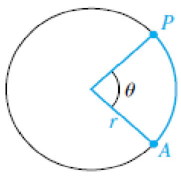


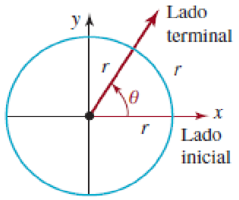
Imagen 10. (Swokowski y Cole, 2011, pág. 370)

Medida en radianes En el cálculo, la unidad más cómoda para medir ángulos es el radián. La medida de un ángulo en radianes se basa en la longitud de un arco del círculo unitario

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Como ya sabemos, un ángulo θ en posición normal se puede considerar como formado por la rotación del lado inicial, desde el eje positivo de x hasta el lado terminal. Como se ve en la **FIGURA 8.1.6**, el lado inicial de θ recorre una distancia t a lo largo de la circunferencia del círculo unitario. Se dice que la medida de θ es t **radianes**.

$$\theta = \frac{s}{r}. \qquad (3)$$



En el caso en que el lado terminal de θ atraviesa un arco de longitud s a lo largo de la circunferencia del círculo igual al radio r del círculo, nos damos cuenta, por (3), de que la medida del ángulo θ es **1 radián**.

Imagen 11. (Zill y Dewar, 2012, pág. 358)

Si un círculo de radio 1 se traza con el vértice de un ángulo en su centro, entonces la medida de este ángulo en **radianes** (abreviado **rad**) es la longitud del arco que subtiende el ángulo (vea Figura 2).

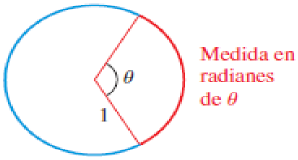


Imagen 12. (Stewart et al., 2012, pág. 434)

La definición planteada por Zill y Dewar (2012) quizás es la más general puesto que está construida en base a una circunferencia de radio r y además comienza expresando que la medida de un ángulo es la longitud del arco que subtiende y luego define qué es un radián. También expresa la fórmula $\theta = \frac{s}{r}$ que permite observar por qué cuando la longitud del arco es igual al radio el ángulo mide 1 radián, aunque allí no se explica de donde proviene. Salvo Sullivan (2013), en el resto de los libros se expresa que cuando se trabaja con radianes no es necesario indicar la unidad de medida, es decir, es lo mismo escribir $\theta = 2\,rad$ o $\theta = 2$.

Sullivan (2013) y Zill y Dewar (2012), explican que como de $\theta = \frac{s}{r}$ las unidades de medidas de s y r se cancelan por ser iguales, θ es adimensional. Quizás, por ese motivo, algunos autores deciden omitir la palabra radianes.

Sobre la equivalencia entre ambos sistemas y el pasaje de uno a otro, encontramos:

Como se tienen dos maneras de medir los ángulos, es importante poder convertir de una a la otra. Considera un círculo de radio r. Un ángulo central de 1 revolución subtenderá un arco igual a la circunferencia del círculo (figura 12). Como la circunferencia de un círculo de radio r es igual a $2\pi r$, sustituimos $2\pi r$ por s en la ecuación (4) para determinar que, para un ángulo θ de 1 revolución,

$$s = r\theta$$
$$2\pi r = r\theta \qquad \theta = 1 \text{ revolución}; s = 2\pi r$$
$$\theta = 2\pi \text{ radianes} \qquad \text{Resuelve para } \theta.$$

Por esto tenemos

$$1 \text{ revolución} = 2\pi \text{ radianes} \qquad (5)$$

Como 1 revolución = 360°, tenemos que

$$360° = 2\pi \text{ radianes}$$

Dividiendo ambos lados entre 2 obtenemos

$$180° = \pi \text{ radianes} \qquad (6)$$

Divide ambos lados de la ecuación (6) entre 180. Entonces

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

Divide ambos lados de (6) entre π. Entonces

$$\frac{180}{\pi} \text{ grados} = 1 \text{ radián}$$

Tenemos las siguientes dos fórmulas de conversión:*

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes} \qquad 1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados} \qquad (7)$$

Imagen 13. (Sullivan, 2013, pág. 508 y 509)

Como la circunferencia del círculo es $2\pi r$, el número de veces que r unidades se pueden trazar es 2π; por tanto, un ángulo de 2π radianes corresponde a 360° y se escribe $360° = 2\pi$ radianes. Este resultado da las siguientes relaciones.

$$(1) \quad 180° = \pi \text{ radianes}$$
$$(2) \quad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ radián} \approx 0.0175 \text{ radián}$$
$$(3) \quad 1 \text{ radián} = \left(\frac{180°}{\pi}\right) \approx 57.2958°$$

Imagen 14. (Swokowski y Cole, 2011, pág. 370 y 371)

Una rotación completa del lado inicial de θ atravesará un arco igual en longitud a la circunferencia del círculo $2\pi r$. Se desprende de (3) que

$$\text{una rotación} = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ radianes}.$$

Como la circunferencia de un círculo unitario es 2π, una rotación completa mide 2π radianes, y también 360°. Por consiguiente, $360° = 2\pi$ radianes, o

$$180° = \pi \text{ radianes}. \qquad (4)$$

Si (4) se interpreta como $180\,(1°) = \pi$ (1 radián), entonces se obtienen las dos fórmulas siguientes para convertir entre grados y radianes.

CONVERSIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ radián} \qquad (5)$$
$$1 \text{ radián} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad (6)$$

Imagen 15. (Zill y Dewar, 2012, pág. 359 y 360)

RELACIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES

$$180° = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

1. Para convertir grados a radianes, multiplique por $\frac{\pi}{180}$.
2. Para convertir radianes a grados, multiplique por $\frac{180}{\pi}$.

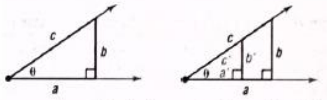
Imagen 16. (Stewart et al., 2012, pág. 434 y 435)

Si bien en todos los libros la equivalencia de los sistemas se define de la misma manera, Sullivan (2013) y Zill y Dewar (2012) vuelven a recurrir a la fórmula $\theta = \frac{s}{r}$. Swokowski y Cole (2011) y Stewart et al. (2012) proponen una definición sin mucha justificación.

En todos los libros se plantea la construcción de las relaciones trigonométricas a partir de triángulos rectángulos, primero para ángulos agudos y luego se extiende a cualquier ángulo. Sullivan (2013) y Swokowski y Cole (2011) lo hacen con mayor descripción puesto que detallan cada proporción entre los lados de los triángulos semejantes y describen cómo quedan planteadas cada razón trigonométrica:

Usando este ángulo agudo θ podemos formar un triángulo rectángulo, como el que se ilustra en la figura 19(b), con la hipotenusa de longitud c y los catetos de longitud a y b. Usando los tres lados de este triángulo, podemos formar exactamente seis razones:

$$\frac{b}{c}, \quad \frac{a}{c}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{c}{b}, \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{a}{b}$$



De hecho, estas razones dependen únicamente del tamaño del ángulo θ y no del triángulo que se forma. Para ver por qué, observa la figura 19(c). Cualesquiera dos triángulos rectángulos formados usando el ángulo θ serán similares, por lo tanto, sus razones correspondientes serán iguales. Como resultado,

$$\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'} \quad \frac{a}{c}=\frac{a'}{c'} \quad \frac{b}{a}=\frac{b'}{a'} \quad \frac{c}{b}=\frac{c'}{b'} \quad \frac{c}{a}=\frac{c'}{a'} \quad \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

Como las razones dependen únicamente del ángulo θ y no del mismo triángulo, le daremos un nombre a cada razón que incluya a θ: seno de θ, coseno de θ, tangente de θ, cosecante de θ, secante de θ y cotangente de θ.

Las seis razones de las longitudes de los lados de un triángulo se llaman **funciones trigonométricas de ángulos agudos** y se definen de la siguiente manera:

Nombre de la función	Abreviación	Valor	Nombre de la función	Abreviación	Valor
seno de θ	sen θ	$\frac{b}{c}$	cosecante de θ	csc θ	$\frac{c}{b}$
coseno de θ	cos θ	$\frac{a}{c}$	secante de θ	sec θ	$\frac{c}{a}$
tangente de θ	tan θ	$\frac{b}{a}$	cotangente de θ	cot θ	$\frac{a}{b}$

Como ayuda para recordar estas definiciones puede ser útil referirse a las longitudes de los lados del triángulo por los nombres *hipotenusa (c)*, *opuesto (b)* y *adyacente (a)*. Ver figura 20. En términos de esos nombres, tenemos las siguientes razones:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{b}{a}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{c}{b} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{c}{a} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{a}{b}$$

Imagen 17. (Sullivan, 2013, pág. 518)

Introduciremos las funciones trigonométricas en la forma en que se originaron históricamente: como razones entre los lados de un triángulo rectángulo. Un triángulo es un **triángulo rectángulo** si uno de sus ángulos es recto. Si θ es un ángulo agudo, podemos considerar un triángulo rectángulo que tiene a θ como uno de sus ángulos, como en la figura 1, donde el símbolo ⌐ especifica el ángulo de 90°. Se pueden obtener seis razones usando las longitudes a, b y c de los lados del triángulo:

$$\frac{b}{c}, \quad \frac{a}{c}, \quad \frac{b}{a}, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{c}{b}$$

Podemos demostrar que estas razones dependen sólo de θ y no del tamaño del triángulo, como se indica en la figura 2. Como los dos triángulos tienen ángulos iguales, son semejantes y por tanto las razones entre lados correspondientes son proporcionales. Por ejemplo

$$\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}, \quad \frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}, \quad \frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}.$$

FIGURA 1

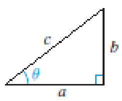
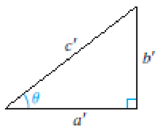


FIGURA 2



Entonces, para cada θ, las seis razones están determinadas de manera única y por tanto son funciones de θ. Reciben el nombre de **funciones trigonométricas*** y se denominan como las funciones **seno, coseno, tangente, cotangente, secante** y **cosecante**, abreviadas **sen, cos, tan, cot, sec** y **csc**, respectivamente. El símbolo sen (θ), o sen θ se usa por la razón b/c, que la función seno asocia con θ. Los valores de las otras cinco funciones se denotan de un modo semejante. Para resumir, si θ es el ángulo agudo del triángulo rectángulo de la figura 1, entonces, por definición,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{c} \qquad \cos\theta = \frac{a}{c} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\csc\theta = \frac{c}{b} \qquad \sec\theta = \frac{c}{a} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}.$$

Si θ es el ángulo en la figura 1, nos referiremos a los lados del triángulo de longitudes a, b y c como el **lado adyacente, lado opuesto** e **hipotenusa**, respectivamente. Usaremos **ady, op** e **hip** para denotar las longitudes de los lados. Entonces podemos representar el triángulo como en la figura 3. Con esta notación, las funciones trigonométricas se pueden expresar como sigue.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

Imagen 18. (Swokowski y Cole, 2011, pág. 378)

Fundamentos de Didáctica de la Matemática

Comenzando por el concepto ángulo, Martínez de la Rosa (2019), plantea que la definición más correcta es al de “giro que describe una semirrecta alrededor de uno de sus extremos (vértice), desde una posición inicial hasta otra final. Se considera positivo si el giro es contrario a las manecillas de un reloj, y negativo en el otro caso”. El autor la considera de tipo más dinámico ya que no presenta dificultades para concebir los grados como un sistema de medición y definición que, según Hernández Yañez (2019) no presenta problemas tampoco para trabajar con ángulos mayores de 360°. Sin embargo, otros autores señalan como dificultad la representación de ángulos mayores de 360° o de ángulos negativos. Martínez Tecolapa y

Martínez Sierra (2007) comentan que los estudiantes suelen tener diferentes concepciones y representaciones de los ángulos, pero en particular a los ángulos positivos y negativos suelen identificarlos según su apertura, es decir, si se abre hacia la derecha es positivo y si se abre hacia la izquierda es negativo. Otra forma con la cual identifican un ángulo negativo es si está construido a la izquierda del eje de ordenadas. Algunos estudiantes desconocen la existencia de estos tipos de ángulos y eso lleva a que se obstaculice la construcción apropiada de las funciones trigonométricas con sus respectivas gráficas.

Con respecto a los sistemas de medición de ángulos, los usualmente enseñados son el sistema sexagesimal y el sistema radial. La mayoría de las veces se comienza con el grado como medida y luego se introduce el radián como un sistema equivalente de medición y se enseña cómo pasar de un sistema a otro. Martínez de la Rosa (2019) plantea que el grado suele predominar sobre el radián y esto causa confusiones para operar con las funciones trigonométricas puesto que estas tienen su dominio en los números reales.

Díaz Cárdenas et al. (2010) plantean que la necesidad de realizar la transición grado a radián se encuentra sujeta al cumplimiento del principio de homogeneidad para operar con funciones como $f(x) = senx + x$ o $f(x) = e^x + cosx$, es decir, los términos que intervienen deben ser homogéneos respecto a la unidad de medida. Según estos autores, como las razones trigonométricas son números reales puros sin dimensiones, por ello que se requiere que los ángulos tengan un número real puro asociado a su medida, es decir el radián. De similar manera, Campo Marín y Lasso Munares (2014) señalan que si un ángulo está medido en radianes entonces "las funciones trigonométricas de ángulos con medida en radián son exactamente iguales que las funciones trigonométricas definidos en términos de un punto terminal determinado por un número real", es decir, el número real es la medida en radianes del ángulo en un caso o la longitud de un arco de una circunferencia en el otro. Martínez Sierra (2008) detecta como problemática la "destematización" de la transición de radianes a reales como argumento de las funciones trigonométricas puesto que se suele omitir la palabra radianes en el valor de un ángulo siendo justificada esta omisión como comodidad y simplicidad para operar. De todas maneras, Díaz Cárdenas et al. (2010) consideran dicha traducción de grado a radián como un obstáculo didáctico puesto que es un tipo de dificultad que aparece en el proceso de enseñanza, atribuible a los profesores, libros de matemática, planes de estudio y demás. Además, la necesidad de la traducción suele ser asumida y no explicada.

Por otra parte, Campo Marín y Lasso Munares (2014) expresan que comenzar el estudio de la trigonometría desde los ángulos o desde los números reales depende de lo que se quiere enseñar, sin embargo, ambas formas son equivalentes. Citan a Stewart (2009), quien señala que la diferencia se encuentra en las aplicaciones que ambas formas poseen. Si se toma una perspectiva de funciones en números reales, su aplicación se presta para los procesos dinámicos como el movimiento armónico, estudio de ondas sonoras y demás, y si se toma una perspectiva de funciones en ángulos, su aplicación se corresponde con medición de fuerza, alturas, ángulos de depresión y elevación, entre otros.

Estos autores señalan que usualmente la definición de razón trigonométrica que se utiliza en la escuela es la de cociente entre las medidas de las longitudes de un triángulo rectángulo y esta definición socava "las relaciones explícitas y las construcciones geométricas que subyacen en ellas" como la semejanza de triángulos, el teorema de Tales, entre otros. Explican que a las razones trigonométricas se las aborda desde la geometría euclidiana, que es "invariante, rígida y sin transformaciones explícitas" y esto complejiza el paso del contexto geométrico al algebraico pues se tienen pocas herramientas para articular la variación en el paso de la razón a la función trigonométrica. También comentan que es el círculo trigonométrico o unitario el que se utiliza para la introducción de las funciones trigonométricas puesto que allí se puede observar la equivalencia entre la medida en grados en el triángulo y la medida en radianes en el plano, las longitudes de arco, entre otras.

Fuentes curriculares

Según los Materiales Curriculares de la provincia de La Pampa (2013), en el eje "En relación con las funciones y el álgebra", en el sexto año de la educación secundaria se debe interpretar las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente; expresadas mediante fórmulas y gráficos cartesianos, extendiendo al marco funcional de las relaciones trigonométricas estudiadas.

Según lo que se puede observar de la guía teórico-práctica construida por la docente, busca enseñar en sexto año de la educación secundaria el sistema sexagesimal y el sistema radial como unidades de medición de ángulos, ángulos centrados y la construcción de las relaciones trigonométricas a partir de la circunferencia unitaria. Se concentra en la fórmula del seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente pero no en su representación gráfica e interpretación, siempre en un ámbito intramatemático.

Al revisar los materiales curriculares de la provincia y la guía, la construcción de las relaciones trigonométricas que la docente propone enseñar corresponde al quinto año de la educación secundaria puesto que en los Materiales Curriculares de la provincia de La Pampa (2013), en el eje “En relación con la geometría y el álgebra” se propone el análisis de las relaciones trigonométricas de cualquier tipo de ángulo a partir de la circunferencia trigonométrica.

Momentos en la propuesta de enseñanza desarrollada en aulas de 6to año del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria

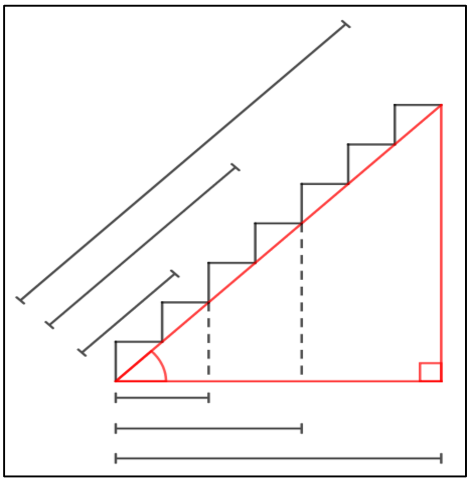
Presentamos algunos momentos en el desarrollo de esta práctica educativa vinculada a la trigonometría.

Momento 1. Razones trigonométricas para ángulos agudos.

Actividad. Esta actividad se propone con el objetivo de que los y las estudiantes identifiquen que, para un ángulo determinado, las razones entre los lados de la escalera se mantienen constantes. Pero también deberán advertir que, como los ángulos son distintos, las razones son distintas, es decir, dependiendo del ángulo con el que se trabaje se va a obtener determinadas razones.

Consigna:

Ludmila quiere construir una escalera en su casa. Para ello le pidió a una amiga suya, que es arquitecta, que le diera algunos consejos. Su amiga le comentó que para que una escalera sea cómoda, es recomendable que la relación entre la altura de la escalera y el largo esté entre 0,5 y 0,64; la relación entre la profundidad de la escalera y el largo esté entre 0,77 y 0,87; y la relación entre la altura y la profundidad esté entre 0,57 y 0,84.



Organización de la actividad. Los ángulos de inclinación de las distintas escaleras serán: 30°, 35°, 40°, 50°, 55° y 60°. Al grupo 1 se le asigna el ángulo de 30°, al grupo 2 el ángulo de 60°, al grupo 3 el ángulo de 35°, al grupo 4 el ángulo de 50°, al grupo 5 el ángulo de 40°, al grupo 6 el ángulo de 55°, y se vuelve a repetir la asignación de los ángulos hasta que no haya más grupos.

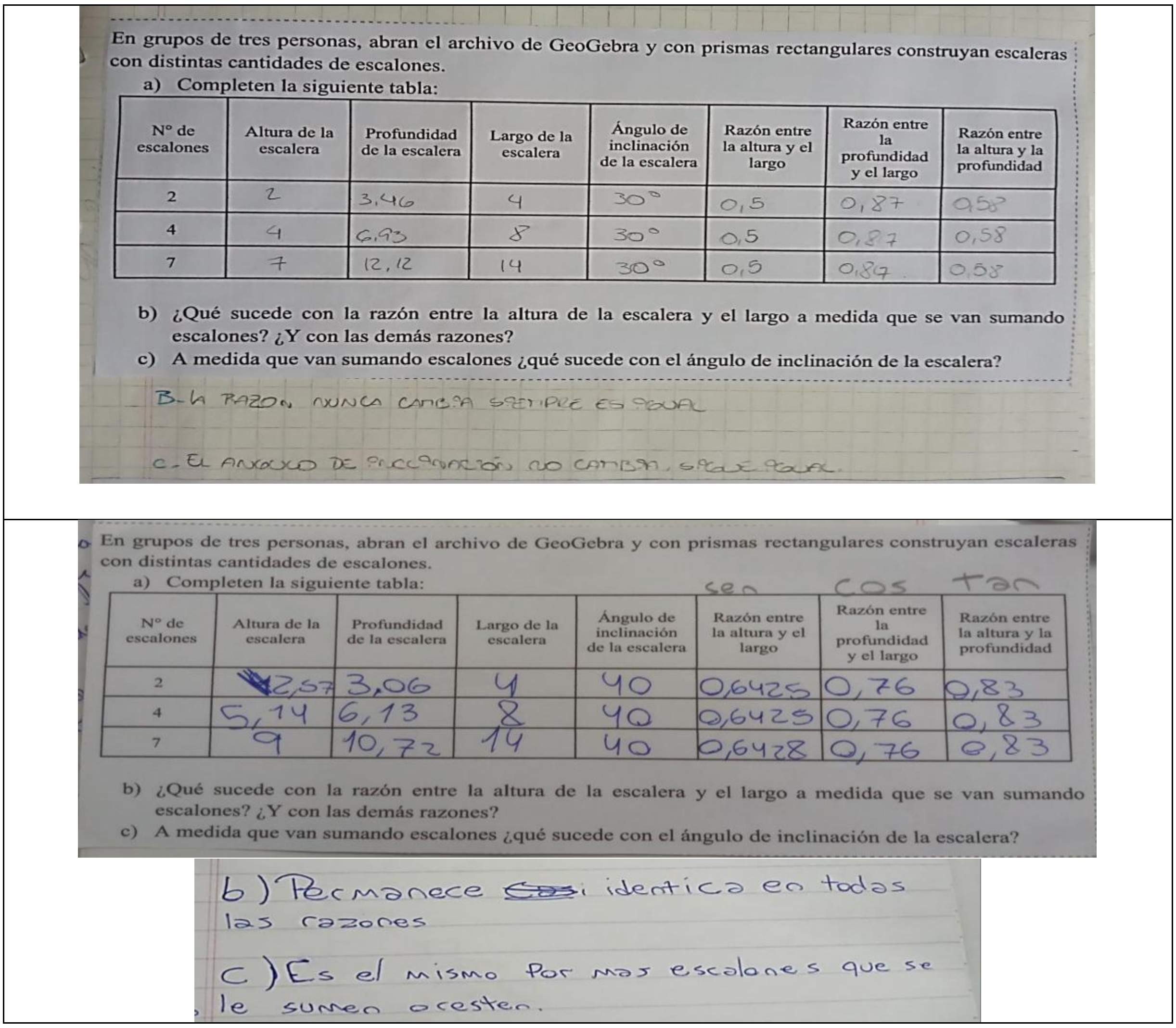
a) Completen la siguiente tabla:

N° de escalones	Altura de la escalera	Profundidad de la escalera	Largo de la escalera	Ángulo de inclinación de la escalera	Razón entre la altura y el largo	Razón entre la profundidad y el largo	Razón entre la altura y la profundidad

2							
4							
7							

b) ¿Qué sucede con la razón entre la altura de la escalera y el largo a medida que se van sumando escalones? ¿Y con las demás razones?

c) A medida que van sumando escalones ¿qué sucede con el ángulo de inclinación de la escalera?



En grupos de tres personas, abran el archivo de GeoGebra y con prismas rectangulares construyan escaleras con distintas cantidades de escalones.

a) Completen la siguiente tabla:

Nº de escalones	Altura de la escalera	Profundidad de la escalera	Largo de la escalera	Ángulo de inclinación de la escalera	Razón entre la altura y el largo	Razón entre la profundidad y el largo	Razón entre la altura y la profundidad
2	2	3,46	4	30°	0,5	0,87	0,58
4	4	6,93	8	30°	0,5	0,87	0,58
7	7	12,12	14	30°	0,5	0,87	0,58

b) ¿Qué sucede con la razón entre la altura de la escalera y el largo a medida que se van sumando escalones? ¿Y con las demás razones?

c) A medida que van sumando escalones ¿qué sucede con el ángulo de inclinación de la escalera?

B- LA RAZON NUNCA CAMBIA SIEMPRE ES IGUAL

C- EL ANGULO DE INCLINACIÓN NO CAMBIA, SIGUE IGUAL.

En grupos de tres personas, abran el archivo de GeoGebra y con prismas rectangulares construyan escaleras con distintas cantidades de escalones.

a) Completen la siguiente tabla:

Nº de escalones	Altura de la escalera	Profundidad de la escalera	Largo de la escalera	Ángulo de inclinación de la escalera	Razón entre la altura y el largo (sen)	Razón entre la profundidad y el largo (cos)	Razón entre la altura y la profundidad (tan)
2	2,57	3,06	4	40	0,6425	0,76	0,83
4	5,14	6,13	8	40	0,6425	0,76	0,83
7	9	10,72	14	40	0,6428	0,76	0,83

b) ¿Qué sucede con la razón entre la altura de la escalera y el largo a medida que se van sumando escalones? ¿Y con las demás razones?

c) A medida que van sumando escalones ¿qué sucede con el ángulo de inclinación de la escalera?

b) Permanece ~~casi~~ identica en todas las razones

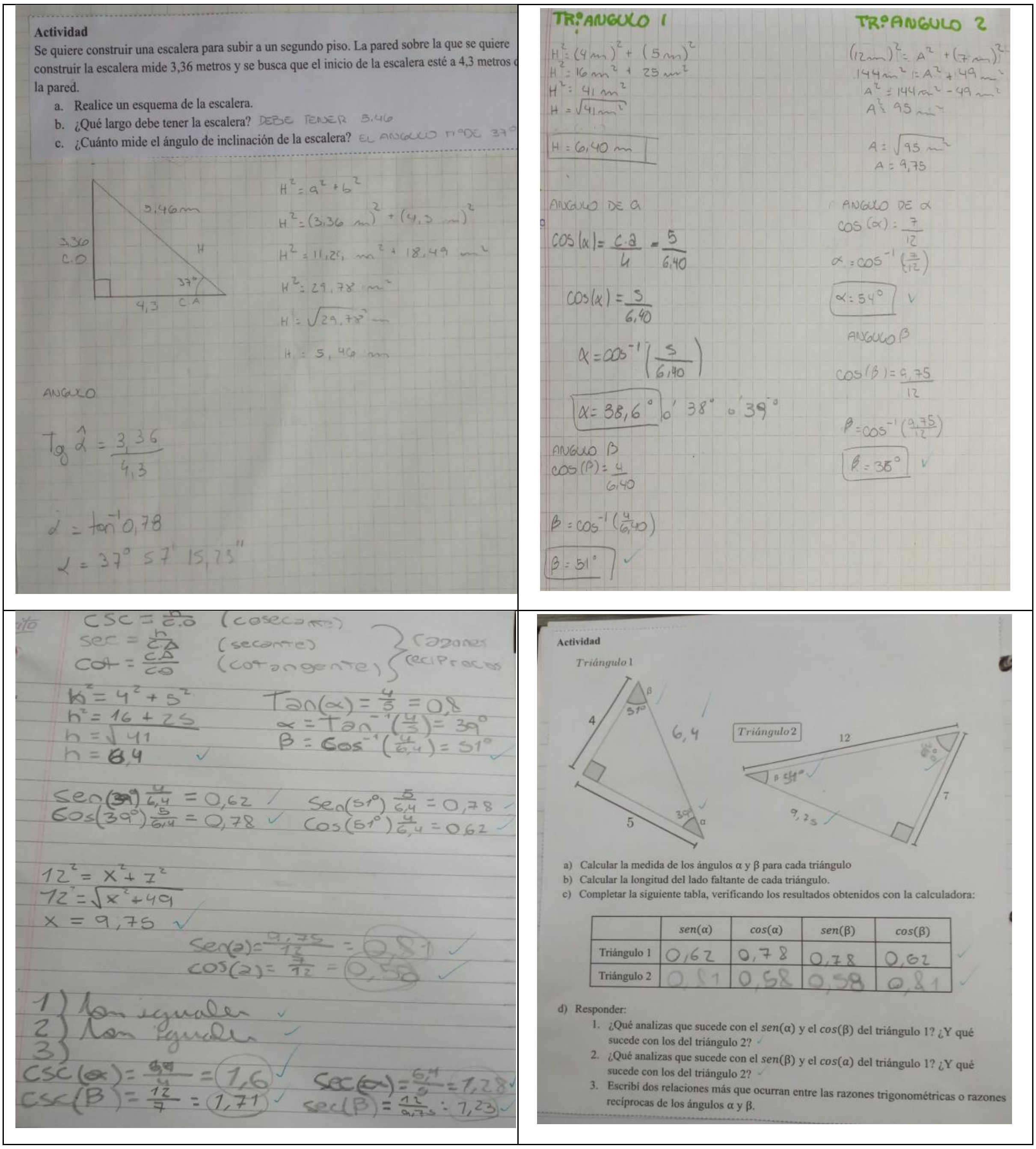
c) Es el mismo por mas escalones que se le sumen o resten.

Imagen 19. Resoluciones de estudiantes

Se ponen nombres a las razones –seno, coseno y tangente–, y se hace un trabajo análogo con razones recíprocas –cotangente, secante y cosecante– justamente para que se pueda advertir que las razones entre los lados de la escalera se mantienen constantes, y que éstas razones son inversos multiplicativos a las anteriores.

Actividad. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

A partir de analizar la relación entre los ángulos interiores en el caso de la escalera, se generalizan las conclusiones para catetos, hipotenusas y ángulos en triángulos rectángulos, se comienza a utilizar la calculadora con estas relaciones específicas, se institucionalizan las razones recíprocas que implican relaciones entre ángulos complementarios y, muy importante, se comienza a aprender a obtener un ángulo de inclinación a partir de unas razones verificadas.



Apartado c):

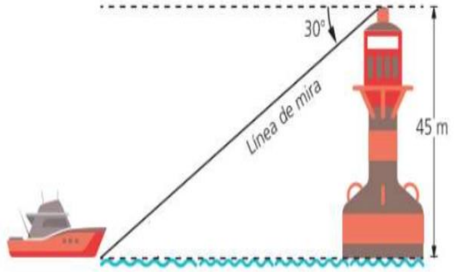
	$sen(\alpha)$	$cos(\alpha)$	$sen(\beta)$	$cos(\beta)$
Triángulo 1	$\frac{4}{6,4} = 0,63$	$\frac{5}{6,4} = 0,78$	$\frac{5}{6,4} = 0,78$	$\frac{4}{6,4} = 0,63$
Triángulo 2	$\frac{9,75}{12} = 0,81$	$\frac{7}{12} = 0,58$	$\frac{7}{12} = 0,58$	$\frac{9,75}{12} = 0,81$

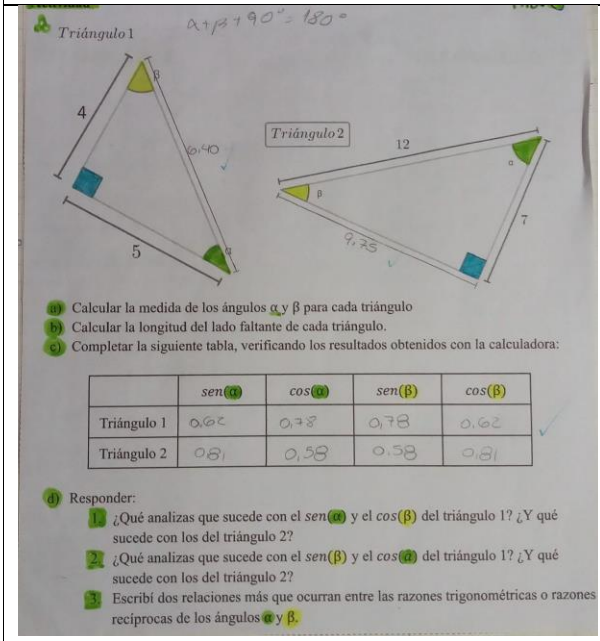
Apartado d):

1. A partir de la lectura de la tabla anteriormente completada, pueden observar que tanto para el triángulo 1 como el triángulo 2, $sen(\alpha) = cos(\beta)$.
2. A partir de la lectura de la tabla anteriormente completada, pueden observar que tanto para el triángulo 1 como el triángulo 2, $sen(\beta) = cos(\alpha)$.
3. $tan(\alpha) = \frac{1}{tan(\beta)}$, $csc(\alpha) = sec(\beta)$, $csc(\beta) = sec(\alpha)$, $cot(\alpha) = \frac{1}{cot(\beta)}$, $tan(\alpha) = cot(\beta)$, $tan(\beta) = cot(\alpha)$

las distancias inaccesibles

Un faro de 45 m de altura ilumina un barco con un rayo de luz que forma un ángulo de 30° con la horizontal (ver figura). ¿A qué distancia se encuentra el barco del faro?

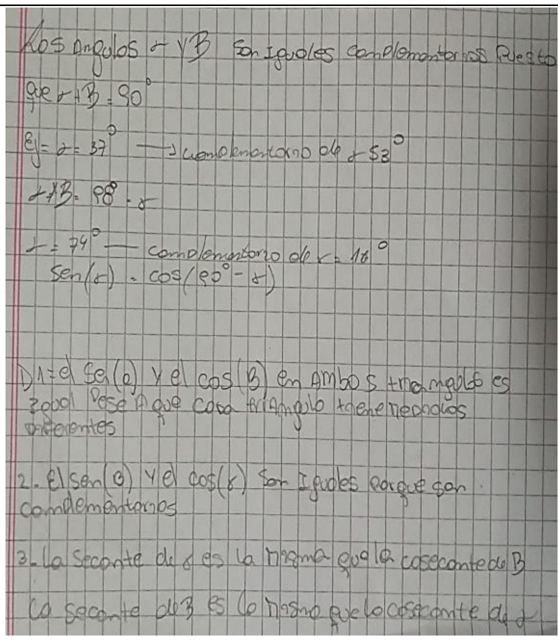




a) Calcular la medida de los ángulos α y β para cada triángulo
b) Calcular la longitud del lado faltante de cada triángulo.
c) Completar la siguiente tabla, verificando los resultados obtenidos con la calculadora:

	$sen(\alpha)$	$cos(\alpha)$	$sen(\beta)$	$cos(\beta)$
Triángulo 1	0,62	0,78	0,78	0,62
Triángulo 2	0,81	0,58	0,58	0,81

d) Responder:
1. ¿Qué analizas que sucede con el $sen(\alpha)$ y el $cos(\beta)$ del triángulo 1? ¿Y qué sucede con los del triángulo 2?
2. ¿Qué analizas que sucede con el $sen(\beta)$ y el $cos(\alpha)$ del triángulo 1? ¿Y qué sucede con los del triángulo 2?
3. Escribí dos relaciones más que ocurran entre las razones trigonométricas o razones recíprocas de los ángulos α y β.



Momento 2. Razones trigonométricas para cualquier ángulo

Esta etapa está diseñada para que las/os alumnas/os puedan comenzar a construir ángulos mayores a 90°, ángulos orientados –positivos y negativos–, ángulos en posición normal o estándar y centrales a una circunferencia.

Actividad. Juego

Jugadores: dos equipos de 3 jugadores.

Elementos: un tablero con cuatro cuadrantes y una circunferencia centrada en la unión de los cuadrantes, un tubo, dos bolitas, un mazo de cartas y un vaso.

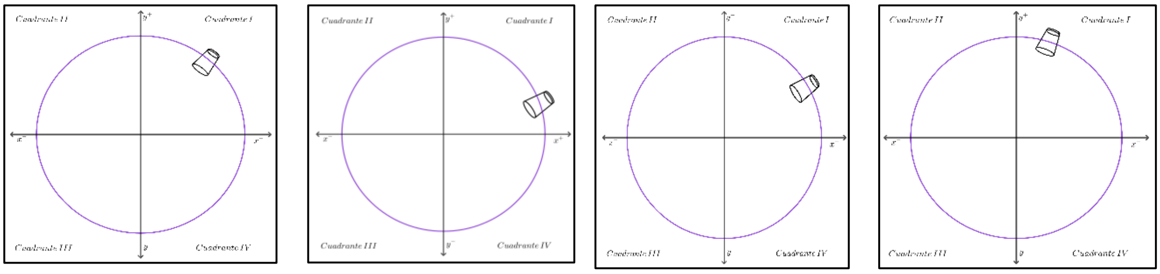
<u>Reglas del juego.</u> Cada equipo en su turno deberá tomar una carta del mazo, en esa carta se representa en qué posición del tablero se debe colocar el vaso para embocar la bolita. El vaso siempre debe estar sobre la circunferencia. Deberán embocar la bolita en el vaso, comenzando la trayectoria desde el eje positivo de las abscisas.

Cada equipo tiene una oportunidad de embocar la bolita por turno. Si embocan la bolita suman 3 puntos, si la bolita rebota en el borde del vaso, pero no entra, suman 1 punto y si no embocan la bolita no suman puntos.

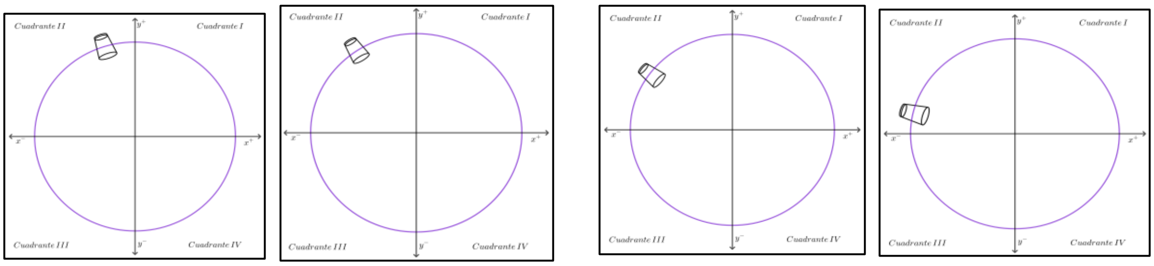
Serán 4 turnos para cada equipo, una carta por cuadrante. Gana el equipo que haya sumado más puntaje.

<u>Cartas del juego</u>

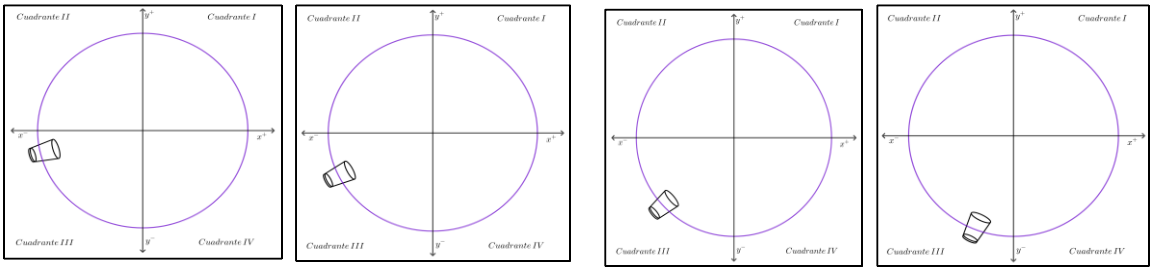
Cuadrante I



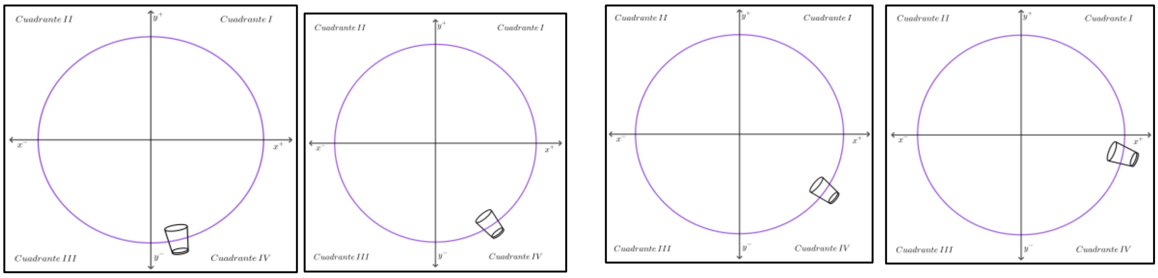
Cuadrante II



Cuadrante III



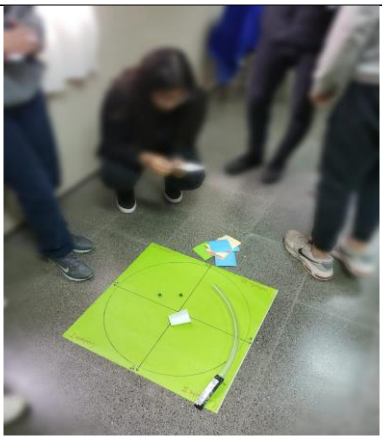
Cuadrante IV

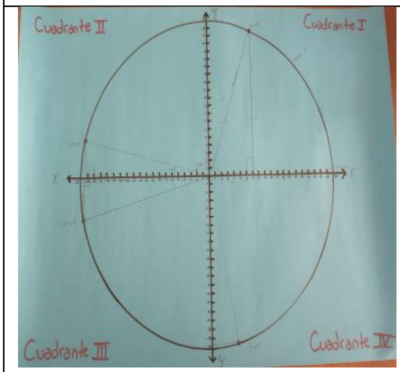


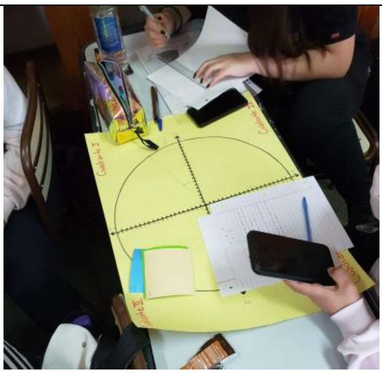
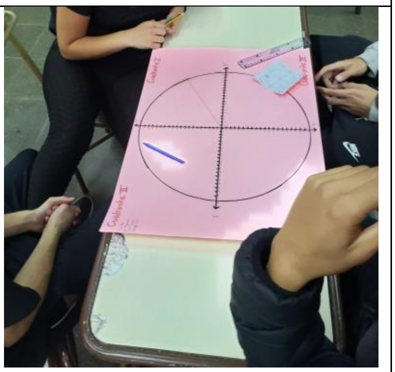
Consigna: Consideren el ángulo que les tocó hacer en el juego en el primer cuadrante.

A partir de ello, deberán graficar

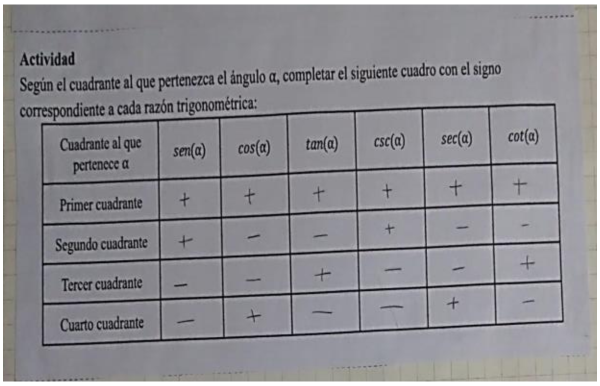
1. Una circunferencia de radio 1 centrada en el punto (0,0).
2. La trayectoria realizada por la bolita para ser embocada en el vaso.
3. Marquen el punto de intersección entre el lado terminal del ángulo y la circunferencia. ¿Qué coordenadas tiene el punto?



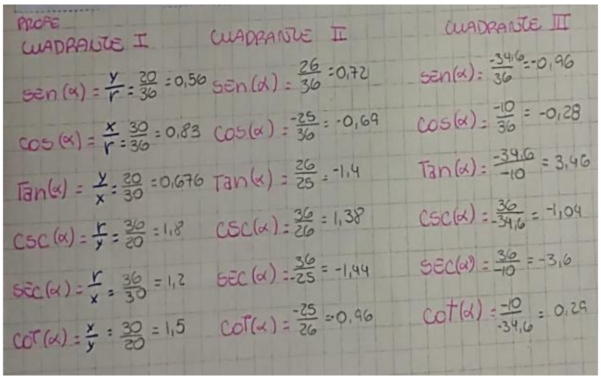
Con esta actividad se logra con las/os estudiantes también, a partir de conocer el cuadrante al que pertenezca el ángulo α, identificar el signo correspondiente a cada razón trigonométrica y a las razones recíprocas.



Actividad

Según el cuadrante al que pertenezca el ángulo α, completar el siguiente cuadro con el signo correspondiente a cada razón trigonométrica:

Cuadrante al que pertenece α	*sen*(α)	*cos*(α)	*tan*(α)	*csc*(α)	*sec*(α)	*cot*(α)
Primer cuadrante	+	+	+	+	+	+
Segundo cuadrante	+	–	–	+	–	-
Tercer cuadrante	–	–	+	–	–	+
Cuarto cuadrante	–	+	–	–	+	–



PROFE

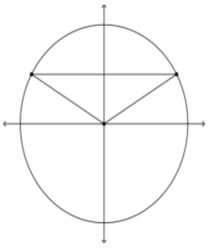
CUADRANTE I	CUADRANTE II	CUADRANTE III
$sen(\alpha) = \frac{y}{r} = \frac{20}{36} = 0{,}56$	$sen(\alpha) = \frac{26}{36} = 0{,}72$	$sen(\alpha) = \frac{-34{,}6}{36} = -0{,}96$
$cos(\alpha) = \frac{x}{r} = \frac{30}{36} = 0{,}83$	$cos(\alpha) = \frac{-25}{36} = -0{,}69$	$cos(\alpha) = \frac{-10}{36} = -0{,}28$
$Tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{20}{30} = 0{,}676$	$Tan(\alpha) = \frac{26}{25} = -1{,}4$	$Tan(\alpha) = \frac{-34{,}6}{-10} = 3{,}46$
$csc(\alpha) = \frac{r}{y} = \frac{36}{20} = 1{,}8$	$csc(\alpha) = \frac{36}{26} = 1{,}38$	$csc(\alpha) = \frac{36}{-34{,}6} = -1{,}04$
$sec(\alpha) = \frac{r}{x} = \frac{36}{30} = 1{,}2$	$sec(\alpha) = \frac{36}{-25} = -1{,}44$	$sec(\alpha) = \frac{36}{-10} = -3{,}6$
$cot(\alpha) = \frac{x}{y} = \frac{30}{20} = 1{,}5$	$cot(\alpha) = \frac{-25}{26} = -0{,}96$	$cot(\alpha) = \frac{-10}{-34{,}6} = 0{,}29$

Momento 3. Ecuaciones trigonométricas iniciales

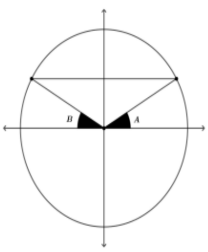
En las siguientes clases, se decidió retomar cómo calcular la medida de ángulos en los distintos cuadrantes, y eso traduce la necesidad de resolver ecuaciones trigonométricas básicas.

Se dibujan los ejes cartesianos y una circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Se determina, a partir de la circunferencia de radio 1, como se calcularía el seno, el coseno y la tangente de un ángulo en esa circunferencia. Es decir, $sen(\alpha) = \frac{y}{1} = y$, $cos(\alpha) = \frac{x}{1} = x$ y $tan(\alpha) = \frac{y}{x}$.

Si $sen(\alpha) = 0,5$, α puede estar en el primer o segundo cuadrante. Esa conclusión la obtenemos de observar la tabla completada en la clase anterior.

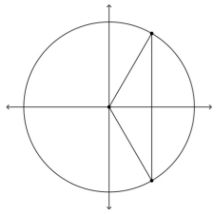


La calculadora da que $\alpha = 30°$, ángulo positivo que pertenece al primer cuadrante.
Para encontrar el ángulo perteneciente al segundo cuadrante, se utilizó un afiche que al doblarlo sobre el eje y se podía observar que el ángulo A y el ángulo B miden lo mismo, y en este caso, medían 30°.

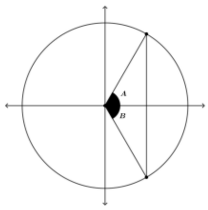


Por lo tanto, el ángulo del segundo cuadrante lo podemos encontrar haciendo $180° - 30° = 150°$ o $-180° - 30° = -210°$.
Una vez que se encuentran los ángulos en ambos cuadrantes, si comenzamos a rotar vueltas completas en sentido horario o antihorario (es decir, de 360°), obtendremos ángulos cuyo seno es igual a 0,5. Por ejemplo, $30° + 360° = 390° \rightarrow sen(390°) = 0,5$,
$30° + 2 \cdot 360° = 750° \rightarrow sen(750°) = 0,5$,
$150° - 360° = -210° \rightarrow sen(-210°) = 0,5$ y así podemos encontrar infinitos ángulos cuyo seno es 0,5.

Si el $cos(\alpha) = 0,5$, α puede estar en el primer o cuarto cuadrante.

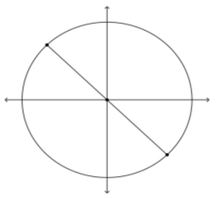


La calculadora da que $\alpha = 60°$, ángulo positivo que pertenece al primer cuadrante.
Para encontrar el ángulo perteneciente al cuarto cuadrante, se utilizó un afiche que al doblarlo sobre el eje x se podía observar que el ángulo A y el ángulo B miden lo mismo, y en este caso, medían 60°.

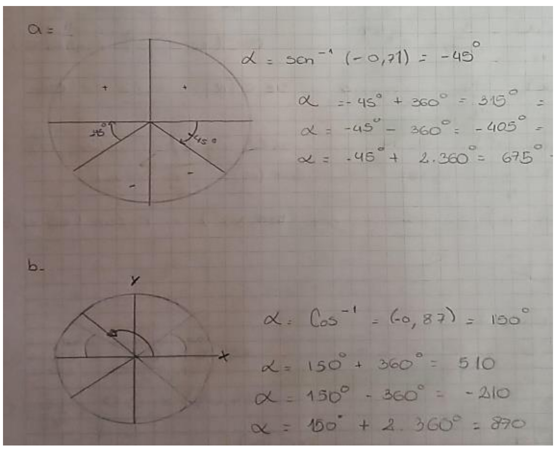


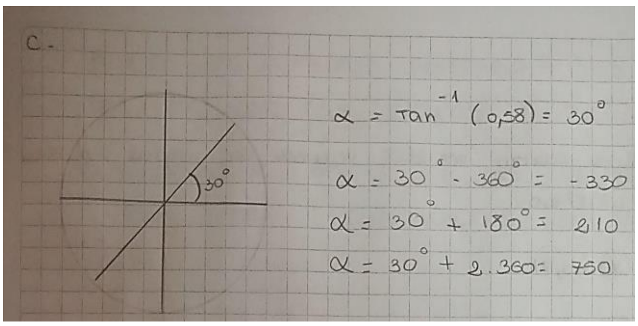
Por lo tanto, el ángulo del cuarto cuadrante lo podemos encontrar haciendo $360° - 60° = 300$ o $-60°$.
Una vez que se encuentran los ángulos en ambos cuadrantes, si comenzamos a rotar vueltas completas en sentido horario o antihorario (es decir, de 360°), obtendremos ángulos cuyo coseno es igual a 0,5. Por ejemplo, $60° + 360° = 420° \rightarrow cos(420°) = 0,5$,
$60° + 2 \cdot 360° = 780° \rightarrow cos(780°) = 0,5$,
$-60° - 360° = -420° \rightarrow cos(-420°) = 0,5$ y así podemos encontrar infinitos ángulos cuyo coseno es 0,5.

Si $tan(\alpha) = -1$, α puede estar en el segundo o cuarto cuadrante.



La calculadora da que $\alpha = -45°$, ángulo negativo que pertenece al cuarto cuadrante.
Para encontrar el ángulo perteneciente al segundo cuadrante, al ángulo anterior se le puede sumar o restar 180°, es decir, $-45° + 180° = 135°$ o $-45° - 180° = -225°$.
Una vez que se encuentran los ángulos en ambos cuadrantes, si comenzamos a rotar vueltas completas en sentido horario o antihorario (es decir, de 360°) o medias vueltas en sentido horario o antihorario (es decir, de 180°), obtendremos ángulos cuya tangente es igual a -1.
Por ejemplo, $-45° + 360° = 315° \rightarrow tan(315°) = -1$,
$-225° - 180° = -405° \rightarrow tan(-405°) = -1$,
$-45° - 2 \cdot 360° = -765° \rightarrow tan(-765) = -1$ y así podemos encontrar infinitos ángulos cuya tangente es -1.



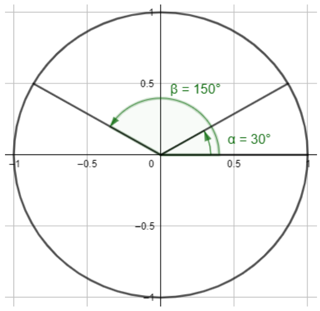


En general, estas ecuaciones trigonométricas básicas representaron la mayor complejidad de comprensión para los y las estudiantes. Al poder calcular una solución, en un cuadrante, con la calculadora, la mayor dificultad era pensar en las soluciones pertenecientes a otro cuadrante o en ángulos mayores a 1 giro. Muchas y muchos inclusive no lo hacían, se concentraban sólo en la solución encontrada con la calculadora. Esto hace pensar en las relaciones con otros saberes de la trigonometría ya que, por ejemplo, en la comprensión de estas relaciones están muchas bases para el trabajo desde la mirada del análisis matemático, de los comportamientos variacionales en el estudio de la trigonometría desde las funciones.

Agrego a continuación algunas actividades que han resultado de aporte en los recorridos de esta propuesta.

Actividad. Hallar regularidades entre las razones trigonométricas de ángulos suplementarios.

a) Con la calculadora, calcula el seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:



Actividad. A partir de un análisis similar al realizado en la actividad anterior, hallar regularidades entre las razones trigonométricas de ángulos que difieren en 180°, 360° y *n* vueltas completas.

Esta actividad permite llegar con las y los estudiantes a la institucionalización:

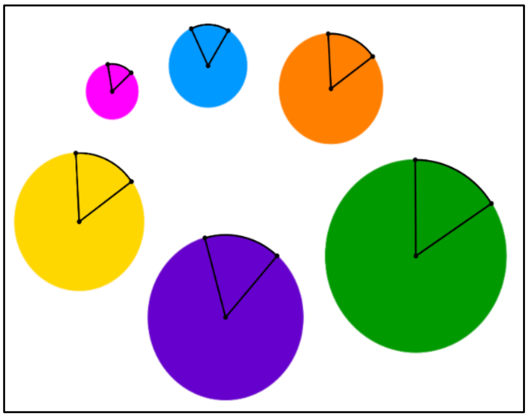
> Los valores de las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera se pueden obtener por reducción al primer cuadrante.
> En el caso de los ángulos suplementarios, hallamos que $sen(180° - \alpha) = sen(\alpha)$, $cos(180° - \alpha) = - cos(\alpha)$ y $tan(180° - \alpha) = - tan(\alpha)$.
> Para los ángulos que difieren en 180°, hallamos que $sen(180° + \alpha) = - sen(\alpha)$, $cos(180° + \alpha) = - cos(\alpha)$ y $tan(180° + \alpha) = tan(\alpha)$.
> Para los ángulos que difieren en una vuelta completa, es decir en 360°, hallamos que $sen(360° + \alpha) = sen(\alpha)$, $cos(360° + \alpha) = cos(\alpha)$ y $tan(360° + \alpha) = tan(\alpha)$.

Actividad. Introducir al radián para armar otro sistema de medición de ángulos.

En grupos de tres, sigan las siguientes instrucciones:

a) Dibujen sobre una cartulina una circunferencia, cuyo radio sea el indicado por la docente.
b) Marquen el radio con un segmento.
c) Con un hilo, que la docente les proveerá, midan el radio de la circunferencia y recorten la medida.

d) Coloquen sobre el punto de intersección entre el radio y la circunferencia un extremo del fragmento de hilo cortado y desde allí, apoyen la totalidad del fragmento sobre la circunferencia.
e) Marquen con un punto, sobre la circunferencia, hasta donde llega el hilo.
f) Desde el centro de la circunferencia, tracen un segmento hasta el punto marcado en el paso anterior.

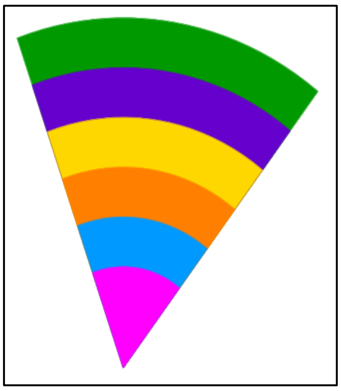


Cuando la longitud de un arco determinado por un ángulo mide lo mismo que el radio de la circunferencia, se dice que el ángulo mide un radián.

Actividad. Argumentos a favor del sistema radial como sistema de medición de ángulos

Consigna:

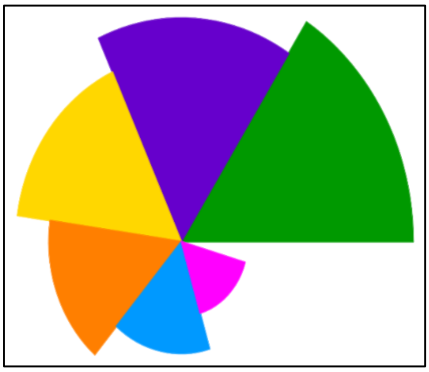
a) Recorten el ángulo construido y aparten el sector circular determinado.
b) Posicionar los sectores circulares recortados uno sobre el otro, de menor a mayor, haciendo coincidir el vértice y lados de los mismos.



Con las y los estudiantes: si el radio cambia, la longitud del arco que forma el ángulo también cambia, pero la apertura del ángulo siempre es la misma. Esto permite armar un sistema que no depende del tamaño de la circunferencia elegida.

Actividad. Dar una respuesta a la necesidad de conversión entre el sistema sexagesimal y el sistema radial.

Consigna: Situar los sectores circulares uno al lado del otro para intentar construir un círculo.



Un ángulo de 360° hace una rotación completa en la circunferencia. En radianes, un ángulo de $2\pi\,rad$ hace una rotación completa en la circunferencia. Por lo tanto, se tiene la equivalencia $360° = 2\pi\,rad$.

Reflexiones finales

Fundamentar el trabajo desde distintos aspectos teóricos y didácticos me permitieron una mayor comprensión de los conceptos. Una de las cuestiones que queda como reflexión es desde qué perspectiva introducir las funciones trigonométricas. Como se plantea con anterioridad, se puede empezar desde dos perspectivas, una variacional y otra estática, todo depende de qué y cómo se quiere enseñar. Teniendo en cuenta lo que la docente de esta aula en que realizo mi residencia propone enseñar, partimos de la construcción de las razones trigonométricas desde el triángulo rectángulo para favorecer el posterior trabajo de las leyes del seno y del coseno. La profesora no propone concentrarse en el aspecto variacional de las funciones.

Otro aspecto a destacar es la importancia de la utilización de distintos recursos para la enseñanza de la trigonometría. Muchas veces, la enseñanza se produce de manera muy abstracta y ajena a la realidad y, claramente, es un área de la matemática que tiene muchas aplicaciones en la realidad. Resulta interesante despegarse de la hoja y recurrir a distintos métodos para explicar los temas y así generar otros intereses en las y los estudiantes.

Finalmente, compartiría con otras y otros docentes que no dejemos de realizar estos tipos de investigaciones al momento de planificar dado que son muy útiles para reflexionar sobre los conceptos que se desean enseñar. Después del recorrido de esta práctica ratifico que, cuanto mayor entendimiento tenemos del tema, mayores posibilidades de elaborar una planificación interesante y completa, más posibilidades de no depender de propuestas editoriales como opciones de manuales a imitar, mejores alternativas de identificar dificultades y obstáculos conceptuales, y muchas más opciones de tomar decisiones de cambios y agregados a partir de necesidades de aprendizaje. Hablamos de la importancia de una práctica educativa como toma de decisiones informadas para promover mayores accesos a los conocimientos.

Referencias Bibliográficas

Bultrago García, L., Romero Roa, J., Ortiz Wilches, L., Gamboa Sulvara, J., Morales Jaime, D., Castaño, J. y Jiménez Ruiz, J. (2013). *Matemática 10. Los caminos del saber.* Santillana. Bogotá, Colombia.

Campo Marín, C. y Lasso Munares, L. (2014). *Una secuencia didáctica en el paso de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas: el caso de la función seno.* [Trabajo de grado, Universidad del Valle]. Santiago de Cali, Colombia. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/11029/

Chorny, F., Casares, P. y Salpeter, C. (2015). *Matemática [4] ES.* Estrada. Buenos Aires, Argentina.

Díaz Cárdenas, M., Salgado Beltrán, G. y Díaz Salgado, V. (2010). *La transición: grados→radianes→reales. Un obstáculo didáctico.* Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Volumen 74, pp. 29-37. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/3543/

Hernández Yañez, M. (2019). *El uso de GeoGebra en el proceso de transición grados-radianes en profesores de matemáticas en formación.* [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Guerrero]. México. Recuperado de: http://ri.uagro.mx/bitstream/handle/uagro/1002/TM_09188436.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Larrosa Cañestro, I. (30 de septiembre de 2014). *Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.* Recuperado de: https://www.geogebra.org/m/etd87kcu#material/gEbSeNn9

Martínez de la Rosa, F. (2019). *Esquemas conceptuales en relación con el ángulo y el radián.* Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Volumen 100, pp. 57-60. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/14716/

Martínez Sierra, G. (2008). *Sobre las rupturas conceptuales en la construcción escolar de las funciones trigonométricas.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 857-867). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. México, DF. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/5040/

Martínez Tecolapa, J. y Martínez Sierra, G. (2007). *La didáctica y la cognición de los ángulos negativos y mayores a 360° y sus funciones trigonométricas: un estudio en el nivel medio superior.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 585-589). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.. Camagüey, Cuba. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/5386/

Ministerio de Educación del Ecuador. (2016). *Matemática 10.° Grado. Texto del estudiante.* SM Ecuaediciones. Quito, Ecuador.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo.* Cengage Learning. México, D. F.

Sullivan, M. (2013). *Álgebra y Trigonometría.* Pearson. México.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica.* Cengage Learnings. México, D. F.

Zill, D. y Dewar, J. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica.* McGraw-Hill. México, D. F.